**Name, Vorname:** | **Matrikel-Nummer:** | **Studien-gang:**

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Summe |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | /1 | /2 | /5 | /3 | /3 | /8 | /2 | /4 | /3 | /31 |

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

  *Viel Erfolg!*

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin(x)$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |
| $\cos(x)$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |

**Aufgabe 1** (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

**Name des Tutors/der Tutorin:** **Gruppennr.:**

**Aufgabe 2** (*2 Punkte*)

Geben Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der folgenden Gleichung in der Form $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an:

$$(z + 3i)^4 = 16\,.$$

$$2 - 3i,\ -2 - 3i,\ -i,\ -5i$$

**Aufgabe 3** (*5 Punkte*)

Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

alle reellen Eigenwerte

$$\lambda_1 = \boxed{-3}, \quad \lambda_2 = \boxed{3}, \quad \lambda_3 = \boxed{-1}$$

und die dazugehörigen Eigenräume

$$V(\lambda_1) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}, \quad V(\lambda_2) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}, \quad V(\lambda_3) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}.$$

Geben Sie eine Transformationsmatrix $T$ und die dazugehörige Diagonalmatrix $D$ so an, dass gilt $D = T^{-1}AT$.

$$T = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \qquad D = \boxed{\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

---

**Aufgabe 4** (*3 Punkte*)

Konstruieren Sie zu den Vektoren

$$v_1 = (3, -4)^\mathsf{T}, \qquad v_2 = (1, 2)^\mathsf{T}$$

eine Orthonormalbasis $B$: $b_1, b_2$ mit $L(v_1) = L(b_1)$ und $L(v_1, v_2) = L(b_1, b_2)$.

$$b_1 = \boxed{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}} \qquad b_2 = \boxed{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

---

**Aufgabe 5** (*3 Punkte*)

Gegeben sind der Punkt $P = (-3, -3)$ sowie die Vektoren

$$f_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } f_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Koordinatentransformation, welche Koordinaten bezüglich $\mathbb{F} = (P;\, f_1,\, f_2)$ in Standardkoordinaten umrechnet und umgekehrt. Geben Sie diese als Affinitäten mit linearem und Translationsanteil an.

$$ {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = \left( \boxed{\begin{matrix} 3 & -3 \\ 2 & -1 \end{matrix}} \right) v + \left( \boxed{\begin{matrix} -3 \\ -3 \end{matrix}} \right); \quad {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = \left( \boxed{\begin{matrix} -\frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{matrix}} \right) v + \left( \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}} \right)$$

---

**Aufgabe 6** (*8 Punkte*)

**(a)** Bestimmen Sie eine euklidische Normalform der folgenden Quadrik:
$Q_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 5 = 0\}$

$$\boxed{-\frac{4}{5}y_1^2 - \frac{2}{5}y_2^2 + 1 = 0}$$

Geben Sie eine Koordinatentransformation an, die die Gleichung der Quadrik in euklidische Normalform überführt.

$$\boxed{{}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} v}$$

**(b)** Bestimmen Sie eine euklidische Normalform der folgenden Quadrik:
$Q_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_2 + 1 = 0\}$

$$\boxed{-\frac{2}{3}y_1^2 - \frac{1}{3}y_2^2 + 1 = 0}$$

Geben Sie den Ursprung eines Koordinatensystems an, in dem die Quadrik euklidische Normalform hat.

$$\boxed{(0, -2)}$$

**(c)** Bestimmen Sie eine euklidische Normalform der folgenden Quadrik:
$Q_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 4x_1^2 + 6x_2 + 6 = 0\}$

$$\boxed{\frac{4}{3}y_1^2 + 2y_2 = 0}$$

---

**Aufgabe 7** (*2 Punkte*)

Sei allgemein eine Basis $B = \{a, b, c\}$ des $\mathbb{R}^3$ gegeben. Es gelte

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \end{pmatrix}.$$

Welchen Rang hat die Matrix $M$? $\mathrm{Rg}(M) = \boxed{3}$

---

**Aufgabe 8** (*4 Punkte*)

Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie und Beschränktheit. Tragen Sie für die Monotonie jeweils „monoton steigend“, „streng monoton steigend“, „monoton fallend“, „streng monoton fallend“ oder „nicht monoton“ ein, und für die Beschränktheit jeweils „nach oben“, „nach unten“, „nach oben und unten“ oder „weder nach oben noch nach unten“ ein.

| | Monotonie | Beschränktheit |
|---|---|---|
| $a_n = -3n$ | streng monoton fallend | nach oben |
| $a_n = (-1)^n \frac{3}{n}$ | nicht monoton | nach oben und unten |
| $a_n = -2(n-1)(n-2)$ | monoton fallend | nach oben |
| $a_n = (-3)^n$ | nicht monoton | weder nach oben noch nach unten |

---

**Aufgabe 9** (*3 Punkte*)

Geben Sie für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Häufungspunkte an oder schreiben Sie in das entsprechende Kästchen „kein Häufungspunkt“. Geben Sie zusätzlich den Grenzwert an, falls dieser existiert. Falls kein Grenzwert existiert, schreiben Sie in das entsprechende Kästchen „divergent“.

| | Häufungspunkte | Grenzwert |
|---|---|---|
| $a_n = 5(-1)^n$ | $-5$, $5$ | divergent |
| $a_n = 3\cos\left(n\,\frac{\pi}{2}\right)$ | $-3$, $0$, $3$ | divergent |
| $a_n = 2 + \frac{1+(-1)^n}{n}$ | $2$ | $2$ |

---

| **Name, Vorname:** | | **Matrikel-Nummer:** | | **Studien-gang:** | |
|---|---|---|---|---|---|

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Summe |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | /1 | /2 | /5 | /3 | /3 | /8 | /2 | /4 | /3 | /31 |

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

  *Viel Erfolg!*

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin(x)$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |
| $\cos(x)$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |

**Aufgabe 1** (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

**Name des Tutors/der Tutorin:** **Gruppennr.:**

**Aufgabe 2** (*2 Punkte*)

Geben Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der folgenden Gleichung in der Form $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an:

$$(z-2)^4 = 81\,.$$

$$5,\ -1,\ 2+3i,\ 2-3i$$

**Aufgabe 3** (*5 Punkte*)

Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

alle reellen Eigenwerte

$$\lambda_1 = \boxed{6}, \quad \lambda_2 = \boxed{4}, \quad \lambda_3 = \boxed{2}$$

und die dazugehörigen Eigenräume

$$V(\lambda_1) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}, \quad V(\lambda_2) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}, \quad V(\lambda_3) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}.$$

Geben Sie eine Transformationsmatrix $T$ und die dazugehörige Diagonalmatrix $D$ so an, dass gilt $D = T^{-1}AT$.

$$T = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \qquad D = \boxed{\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

---

**Aufgabe 4** (*3 Punkte*)

Konstruieren Sie zu den Vektoren

$$v_1 = (4, -3)^\mathsf{T}, \qquad v_2 = (2, 1)^\mathsf{T}$$

eine Orthonormalbasis $B$: $b_1, b_2$ mit $L(v_1) = L(b_1)$ und $L(v_1, v_2) = L(b_1, b_2)$.

$$b_1 = \boxed{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}} \qquad b_2 = \boxed{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}}$$

---

**Aufgabe 5** (*3 Punkte*)

Gegeben sind der Punkt $P = (3, 0)$ sowie die Vektoren

$$f_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } f_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Koordinatentransformation, welche Koordinaten bezüglich $\mathbb{F} = (P;\, f_1,\, f_2)$ in Standardkoordinaten umrechnet und umgekehrt. Geben Sie diese als Affinitäten mit linearem und Translationsanteil an.

$$_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = \left( \boxed{\begin{matrix} -1 & 2 \\ -3 & 3 \end{matrix}} \right) v + \left( \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 0 \end{matrix}} \right); \quad _{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = \left( \boxed{\begin{matrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{matrix}} \right) v + \left( \boxed{\begin{matrix} -3 \\ -3 \end{matrix}} \right)$$

---

**Aufgabe 6** (*8 Punkte*)

**(a)** Bestimmen Sie eine euklidische Normalform der folgenden Quadrik:
$Q_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 4x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 - 6 = 0\}$

$$-\frac{5}{6}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + 1 = 0$$

Geben Sie eine Koordinatentransformation an, die die Gleichung der Quadrik in euklidische Normalform überführt.

$$_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} v$$

**(b)** Bestimmen Sie eine euklidische Normalform der folgenden Quadrik:
$Q_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1^2 + x_2^2 + 6x_2 + 1 = 0\}$

$$-\frac{3}{8}y_1^2 - \frac{1}{8}y_2^2 + 1 = 0$$

Geben Sie den Ursprung eines Koordinatensystems an, in dem die Quadrik euklidische Normalform hat.

$(0, -3)$

**(c)** Bestimmen Sie eine euklidische Normalform der folgenden Quadrik:
$Q_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 5x_1^2 - 6x_2 + 6 = 0\}$

$$-\frac{5}{3}y_1^2 + 2y_2 = 0$$

---

**Aufgabe 7** (*2 Punkte*)

Sei allgemein eine Basis $B = \{a, b, c\}$ des $\mathbb{R}^3$ gegeben. Es gelte

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \end{pmatrix}.$$

Welchen Rang hat die Matrix $M$? $\mathrm{Rg}(M) = \boxed{2}$

---

**Aufgabe 8** (*4 Punkte*)

Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie und Beschränktheit. Tragen Sie für die Monotonie jeweils „monoton steigend“, „streng monoton steigend“, „monoton fallend“, „streng monoton fallend“ oder „nicht monoton“ ein, und für die Beschränktheit jeweils „nach oben“, „nach unten“, „nach oben und unten“ oder „weder nach oben noch nach unten“ ein.

| | Monotonie | Beschränktheit |
|---|---|---|
| $a_n = (-4)^n$ | nicht monoton | weder nach oben noch nach unten |
| $a_n = 2n$ | streng monoton steigend | nach unten |
| $a_n = (-1)^n \frac{4}{n}$ | nicht monoton | nach oben und unten |
| $a_n = 3(n-1)(n-2)$ | monoton steigend | nach unten |

---

**Aufgabe 9** (*3 Punkte*)

Geben Sie für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Häufungspunkte an oder schreiben Sie in das entsprechende Kästchen „kein Häufungspunkt“. Geben Sie zusätzlich den Grenzwert an, falls dieser existiert. Falls kein Grenzwert existiert, schreiben Sie in das entsprechende Kästchen „divergent“.

| | Häufungspunkte | Grenzwert |
|---|---|---|
| $a_n = 4(-1)^n$ | $-4$, $4$ | divergent |
| $a_n = 2\cos\left(n\,\frac{\pi}{2}\right)$ | $-2$, $0$, $2$ | divergent |
| $a_n = 3 + \frac{1+(-1)^n}{n}$ | 3 | 3 |

---

**Name, Vorname:** **Matrikel-Nummer:** **Studien-gang:**

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Summe |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | /1 | /2 | /5 | /3 | /3 | /8 | /2 | /4 | /3 | /31 |

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

  *Viel Erfolg!*

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin(x)$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\cos(x)$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |

**Aufgabe 1** (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

**Name des Tutors/der Tutorin:** **Gruppennr.:**

**Aufgabe 2** (*2 Punkte*)

Geben Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der folgenden Gleichung in der Form $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an:

$$(z - 3i)^4 = 16\,.$$

$$2 + 3i,\ -2 + 3i,\ 5i,\ i$$

**Aufgabe 3** (*5 Punkte*)

Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

alle reellen Eigenwerte

$$\lambda_1 = \boxed{6}, \quad \lambda_2 = \boxed{-4}, \quad \lambda_3 = \boxed{3}$$

und die dazugehörigen Eigenräume

$$V(\lambda_1) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}, \quad V(\lambda_2) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}, \quad V(\lambda_3) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}.$$

Geben Sie eine Transformationsmatrix $T$ und die dazugehörige Diagonalmatrix $D$ so an, dass gilt $D = T^{-1}AT$.

$$T = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \qquad D = \boxed{\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

---

**Aufgabe 4** (*3 Punkte*)

Konstruieren Sie zu den Vektoren

$$v_1 = (-3, 4)^\mathsf{T}, \qquad v_2 = (1, 2)^\mathsf{T}$$

eine Orthonormalbasis $B$: $b_1, b_2$ mit $L(v_1) = L(b_1)$ und $L(v_1, v_2) = L(b_1, b_2)$.

$$b_1 = \boxed{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}} \qquad b_2 = \boxed{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

---

**Aufgabe 5** (*3 Punkte*)

Gegeben sind der Punkt $P = (3, -3)$ sowie die Vektoren

$$f_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Koordinatentransformation, welche Koordinaten bezüglich $\mathbb{F} = (P;\, f_1,\, f_2)$ in Standardkoordinaten umrechnet und umgekehrt. Geben Sie diese als Affinitäten mit linearem und Translationsanteil an.

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = \left( \boxed{\begin{matrix} -3 & 1 \\ 3 & -2 \end{matrix}} \right) v + \left( \boxed{\begin{matrix} 3 \\ -3 \end{matrix}} \right); \quad {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = \left( \boxed{\begin{matrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & -1 \end{matrix}} \right) v + \left( \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} \right)$$

---

**Aufgabe 6** (*8 Punkte*)

**(a)** Bestimmen Sie eine euklidische Normalform der folgenden Quadrik:
$Q_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -x_1^2 + 6x_1x_2 - x_2^2 - 3 = 0\}$

$$\boxed{-\frac{2}{3}y_1^2 + \frac{4}{3}y_2^2 + 1 = 0}$$

Geben Sie eine Koordinatentransformation an, die die Gleichung der Quadrik in euklidische Normalform überführt.

$$\boxed{{}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} v}$$

**(b)** Bestimmen Sie eine euklidische Normalform der folgenden Quadrik:
$Q_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 4x_1^2 + x_2^2 - 4x_2 + 1 = 0\}$

$$\boxed{-\frac{4}{3}y_1^2 - \frac{1}{3}y_2^2 + 1 = 0}$$

Geben Sie den Ursprung eines Koordinatensystems an, in dem die Quadrik euklidische Normalform hat.

$$\boxed{(0, 2)}$$

**(c)** Bestimmen Sie eine euklidische Normalform der folgenden Quadrik:
$Q_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 5x_1^2 + 4x_2 + 4 = 0\}$

$$\boxed{\frac{5}{2}y_1^2 + 2y_2 = 0}$$

---

**Aufgabe 7** (*2 Punkte*)

Sei allgemein eine Basis $B = \{a, b, c\}$ des $\mathbb{R}^3$ gegeben. Es gelte

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Welchen Rang hat die Matrix $M$? $\quad \mathrm{Rg}(M) = \boxed{3}$

---

**Aufgabe 8** (*4 Punkte*)

Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie und Beschränktheit. Tragen Sie für die Monotonie jeweils „monoton steigend“, „streng monoton steigend“, „monoton fallend“, „streng monoton fallend“ oder „nicht monoton“ ein, und für die Beschränktheit jeweils „nach oben“, „nach unten“, „nach oben und unten“ oder „weder nach oben noch nach unten“ ein.

| | Monotonie | Beschränktheit |
|---|---|---|
| $a_n = 2(n-1)(n-2)$ | monoton steigend | nach unten |
| $a_n = (-5)^n$ | nicht monoton | weder nach oben noch nach unten |
| $a_n = 3n$ | streng monoton steigend | nach unten |
| $a_n = (-1)^n \dfrac{5}{n}$ | nicht monoton | nach oben und unten |

---

**Aufgabe 9** (*3 Punkte*)

Geben Sie für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Häufungspunkte an oder schreiben Sie in das entsprechende Kästchen „kein Häufungspunkt“. Geben Sie zusätzlich den Grenzwert an, falls dieser existiert. Falls kein Grenzwert existiert, schreiben Sie in das entsprechende Kästchen „divergent“.

| | Häufungspunkte | Grenzwert |
|---|---|---|
| $a_n = 3(-1)^n$ | $-3$, $3$ | divergent |
| $a_n = 5\cos\left(n\,\dfrac{\pi}{2}\right)$ | $-5$, $0$, $5$ | divergent |
| $a_n = 4 + \dfrac{1+(-1)^n}{n}$ | 4 | 4 |

---

| **Name, Vorname:** | | **Matrikel-Nummer:** | | **Studien-gang:** | |
|---|---|---|---|---|---|

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Summe |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | /1 | /2 | /5 | /3 | /3 | /8 | /2 | /4 | /3 | /31 |

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
  *Viel Erfolg!*

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin(x)$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |
| $\cos(x)$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |

**Aufgabe 1** (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

**Name des Tutors/der Tutorin:** **Gruppennr.:**

**Aufgabe 2** (*2 Punkte*)

Geben Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der folgenden Gleichung in der Form $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an:

$$(z+2)^4 = 81\,.$$

$$1,\ -5,\ -2+3i,\ -2-3i$$

**Aufgabe 3** (*5 Punkte*)

Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alle reellen Eigenwerte

$$\lambda_1 = \boxed{5}, \quad \lambda_2 = \boxed{-3}, \quad \lambda_3 = \boxed{2}$$

und die dazugehörigen Eigenräume

$$V(\lambda_1) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}, \quad V(\lambda_2) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}, \quad V(\lambda_3) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}.$$

Geben Sie eine Transformationsmatrix $T$ und die dazugehörige Diagonalmatrix $D$ so an, dass gilt $D = T^{-1}AT$.

$$T = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \qquad D = \boxed{\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

---

**Aufgabe 4** (*3 Punkte*)

Konstruieren Sie zu den Vektoren

$$v_1 = (-4, 3)^\mathsf{T}, \qquad v_2 = (2, 1)^\mathsf{T}$$

eine Orthonormalbasis $B\colon b_1, b_2$ mit $L(v_1) = L(b_1)$ und $L(v_1, v_2) = L(b_1, b_2)$.

$$b_1 = \boxed{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}} \qquad b_2 = \boxed{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}}$$

---

**Aufgabe 5** (*3 Punkte*)

Gegeben sind der Punkt $P = (3, 0)$ sowie die Vektoren

$$f_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } f_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Koordinatentransformation, welche Koordinaten bezüglich $\mathbb{F} = (P;\, f_1,\, f_2)$ in Standardkoordinaten umrechnet und umgekehrt. Geben Sie diese als Affinitäten mit linearem und Translationsanteil an.

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = \left( \boxed{\begin{matrix} -3 & -2 \\ 3 & 1 \end{matrix}} \right) v + \left( \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 0 \end{matrix}} \right); \quad {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = \left( \boxed{\begin{matrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & -1 \end{matrix}} \right) v + \left( \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 3 \end{matrix}} \right)$$

---

**Aufgabe 6** (*8 Punkte*)

**(a)** Bestimmen Sie eine euklidische Normalform der folgenden Quadrik:
$Q_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -2x_1^2 + 8x_1x_2 - 2x_2^2 - 7 = 0\}$

$$\boxed{-\frac{2}{7}y_1^2 + \frac{6}{7}y_2^2 + 1 = 0}$$

Geben Sie eine Koordinatentransformation an, die die Gleichung der Quadrik in euklidische Normalform überführt.

$$\boxed{{}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} v}$$

**(b)** Bestimmen Sie eine euklidische Normalform der folgenden Quadrik:
$Q_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 5x_1^2 + x_2^2 - 6x_2 + 1 = 0\}$

$$\boxed{-\frac{5}{8}y_1^2 - \frac{1}{8}y_2^2 + 1 = 0}$$

Geben Sie den Ursprung eines Koordinatensystems an, in dem die Quadrik euklidische Normalform hat.

$$\boxed{(0, 3)}$$

**(c)** Bestimmen Sie eine euklidische Normalform der folgenden Quadrik:
$Q_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 7x_1^2 - 4x_2 + 4 = 0\}$

$$\boxed{-\frac{7}{2}y_1^2 + 2y_2 = 0}$$

---

**Aufgabe 7** (*2 Punkte*)

Sei allgemein eine Basis $B = \{a, b, c\}$ des $\mathbb{R}^3$ gegeben. Es gelte

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}.$$

Welchen Rang hat die Matrix $M$? $\mathrm{Rg}(M) = \boxed{2}$

---

**Aufgabe 8** (*4 Punkte*)

Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie und Beschränktheit. Tragen Sie für die Monotonie jeweils „monoton steigend“, „streng monoton steigend“, „monoton fallend“, „streng monoton fallend“ oder „nicht monoton“ ein, und für die Beschränktheit jeweils „nach oben“, „nach unten“, „nach oben und unten“ oder „weder nach oben noch nach unten“ ein.

| | Monotonie | Beschränktheit |
|---|---|---|
| $a_n = (-1)^n \dfrac{2}{n}$ | nicht monoton | nach oben und unten |
| $a_n = -3(n-1)(n-2)$ | monoton fallend | nach oben |
| $a_n = (-2)^n$ | nicht monoton | weder nach oben noch nach unten |
| $a_n = -2n$ | streng monoton fallend | nach oben |

---

**Aufgabe 9** (*3 Punkte*)

Geben Sie für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Häufungspunkte an oder schreiben Sie in das entsprechende Kästchen „kein Häufungspunkt“. Geben Sie zusätzlich den Grenzwert an, falls dieser existiert. Falls kein Grenzwert existiert, schreiben Sie in das entsprechende Kästchen „divergent“.

| | Häufungspunkte | Grenzwert |
|---|---|---|
| $a_n = 2(-1)^n$ | $-2$, $2$ | divergent |
| $a_n = 4\cos\left(n\,\dfrac{\pi}{2}\right)$ | $-4$, $0$, $4$ | divergent |
| $a_n = 5 + \dfrac{1+(-1)^n}{n}$ | $5$ | $5$ |

---