Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/2	/5	/3	/3	/8	/5	/4	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

  Viel Erfolg!

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:		**Gruppennr.:**	

Aufgabe 2 (*2 Punkte*)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz. Bestimmen Sie die Summe, falls die Reihe konvergiert. Wenn die Reihe nicht konvergiert, tragen Sie in das entsprechende Kästchen "divergent" ein.

	Grenzwert
$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j$	2
$\sum_{j=0}^{\infty} 2^j$	divergent

Aufgabe 3 (*5 Punkte*)

Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alle komplexen Eigenwerte

$$\lambda_1 = \boxed{3}, \quad \lambda_2 = \boxed{i}, \quad \lambda_3 = \boxed{-i}$$

und die dazugehörigen Eigenräume

$$V(\lambda_1) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}, \quad V(\lambda_2) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}, \quad V(\lambda_3) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}.$$

Geben Sie eine Transformationsmatrix T so an, dass $T^{-1}AT = D$ eine Diagonalmatrix ist

$$T = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & i & -i \\ 5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Berechnen Sie

$$\det(A) = \boxed{3}.$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*)

Geben Sie für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Limes inferior $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ und den Limes superior $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ an.

	$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$	$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$
$a_n = (-1)^n$	-1	1
$a_n = \dfrac{n}{(-1)^n}$	$-\infty$	$+\infty$
$a_n = (\cos(n\pi))^{n+1}$	1	1

Aufgabe 5 (*3 Punkte*)

Konstruieren Sie zu den Vektoren

$$v_1 = (1,1)^\mathsf{T}, \qquad v_2 = (0,2)^\mathsf{T}$$

eine Orthonormalbasis $B\colon b_1, b_2$ mit $L(v_1) = L(b_1)$ und $L(v_1, v_2) = L(b_1, b_2)$.

$$b_1 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad b_2 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 6 (*8 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform der folgenden Quadrik:
$Q_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1^2 + 12x_1x_2 - 7x_2^2 + 3 = 0\}$

$$\boxed{\frac{5}{3}y_1^2 - \frac{10}{3}y_2^2 + 1 = 0}$$

Geben Sie eine Koordinatentransformation an, die die Gleichung der Quadrik in euklidische Normalform überführt.

$$\boxed{{}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} v}$$

(b) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform der folgenden Quadrik:
$Q_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 + 1 = 0\}$

$$\boxed{4y_1^2 + 2y_2^2 + 1 = 0}$$

Geben Sie den Ursprung eines Koordinatensystems an, in dem die Quadrik euklidische Normalform hat.

$$\boxed{\left(-\frac{1}{2}, 0\right)}$$

(c) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform der folgenden Quadrik:
$Q_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -5x_1^2 + 8x_2 - 8 = 0\}$

$$\boxed{-\frac{5}{4}y_1^2 + 2y_2 = 0}$$

Aufgabe 7 (*5 Punkte*)

Gegeben sind der Punkt $P = (2,\, 0,\, 2)$ sowie die Vektoren

$$f_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Koordinatentransformation, welche Koordinaten bezüglich $\mathbb{F} = (P;\, f_1,\, f_2,\, f_3)$ in Standardkoordinaten umrechnet und umgekehrt. Geben Sie diese als Affinitäten mit linearem und Translationsanteil an.

$$ {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = \left(\boxed{\begin{matrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \end{matrix}} \right) v + \left(\boxed{\begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}} \right) ; \quad {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = \left(\boxed{\begin{matrix} \frac{5}{4} & \frac{9}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \end{matrix}} \right) v + \left(\boxed{\begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} \right) $$

Aufgabe 8 (*4 Punkte*)

Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie und Beschränktheit. Tragen Sie für die Monotonie jeweils „monoton steigend“, „streng monoton steigend“, „monoton fallend“, „streng monoton fallend“ oder „nicht monoton“ ein, und für die Beschränktheit jeweils „nach oben“, „nach unten“, „nach oben und unten“ oder „weder nach oben noch nach unten“ ein.

	Monotonie	Beschränktheit
$a_n = n^2$	streng monoton steigend	nach unten
$a_n = (n-10)(n-20)$	nicht monoton	nach unten
$a_n = \sin(n)$	nicht monoton	nach oben und unten
$a_n = 2n - (-1)^n$	monoton steigend	nach unten
