Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studiengang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
Punkte	/1	/3	/3	/6	/3	/3	/2	/4	/3	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan(x)$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan(x)$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie den Konvergenzradius ϱ der folgenden Potenzreihen.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n - 2} x^n \qquad \varrho = \boxed{3}$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} 7e^{-2n} x^{2n} \qquad \varrho = \boxed{e}$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Berechnen Sie:

$$\int \frac{x^4 + x^3 - 6x^2 + 5}{x^2 + x - 6} \,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[\frac{1}{3}\,x^3 + \ln|x-2| - \ln|x+3|\right]}$$

Aufgabe 4 (*6 Punkte*) Es sei die Funktion f gegeben durch

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon (x, y) \mapsto x^2 y + 2(y-1)^2 + 5$$

Berechnen Sie den Gradienten und die Hessematrix von f:

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{2xy} \\ \boxed{x^2 + 4(y-1)} \end{pmatrix} \qquad \mathrm{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{2y} & \boxed{2x} \\ \boxed{2x} & \boxed{4} \end{pmatrix}$$

Geben Sie alle kritischen Stellen an:	$(0,1), (2,0), (-2,0)$
Geben Sie alle Stellen an, an denen Sattelpunkte vorliegen:	$(2,0), (-2,0)$
Geben Sie alle Stellen an, an denen lokale Minima vorliegen:	$(0,1)$
Geben Sie alle Stellen an, an denen lokale Maxima vorliegen:	Kommt nicht vor!

Geben Sie die Taylorentwicklung zweiter Stufe im Punkte $(0,1)$ an:

$$T_2\big(f, (x,y), (0,1)\big) = \boxed{5 + x^2 + 2(y-1)^2}$$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie folgende Grenzwerte.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-1}{x+2} = \boxed{\frac{2}{5}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 + 3x^2}{2 - x + x^2} = \boxed{3}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{3x}}{2x} = \boxed{-\frac{3}{2}}$$

Aufgabe 6 (*3 Punkte*) Berechnen Sie folgende Integrale.

$$\int (2x-1)\sin(x+3)\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[(1-2x)\cos(x+3)+2\sin(x+3)\right]}$$

$$\int \sinh(\sin(x))\cos(x)\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[\cosh(\sin(x))\right]}$$

$$\int 2^{x-1}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[\frac{2^{x-1}}{\ln(2)}\right]}$$

Aufgabe 7 (*2 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale. Falls das uneigentliche Integral nicht existiert, tragen Sie „divergent" ein.

$$\int 2\,x\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[\quad -e^{-x^2} \quad\right]} \qquad \int_1^{+\infty} 2\,x\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\frac{1}{e}}$$

Aufgabe 8 (*4 Punkte*) Gegeben ist (für ein geeignetes Intervall I) die Funktion f in Potenzreihendarstellung

$$f\colon I \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} 2n\left(-\frac{4}{9}\right)^n x^{2n-1}\,.$$

(a) Bestimmen Sie die Potenzreihendarstellung einer Stammfunktion F von f.

$$F(x) = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{9}\right)^n x^{2n}}$$

(b) Geben Sie eine geschlossene Darstellung der Funktion F an.

$$F(x) = \boxed{-1+\frac{9}{9+4x^2}}$$

(c) Berechnen Sie daraus eine geschlossene Darstellung von f.

$$f(x) = \boxed{-\frac{72x}{(9+4x^2)^2}}$$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie, falls existent, die jeweiligen Grenzwerte und Summen. Tragen Sie andernfalls „divergent“ ein.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n^2+n}}$	$=$	divergent
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{(k-1)!}$	$=$	$-e$
$\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{k+2}$	$=$	$\frac{9}{4}$

Aufgabe 10 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie alle ersten partiellen Ableitungen der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto e^{x^2+2y+z} \ln\left(1+y^2\right).$$

$$f_x(x,y,z) = 2\,x\,e^{x^2+2y+z} \ln(1+y^2)$$

$$f_y(x,y,z) = 2\,e^{x^2+2y+z} \left(\frac{y}{1+y^2} + \ln(1+y^2)\right)$$

$$f_z(x,y,z) = e^{x^2+2y+z} \ln(1+y^2)$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
Punkte	/1	/3	/3	/6	/3	/3	/2	/4	/3	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan(x)$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan(x)$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:

Gruppennr.:

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie den Konvergenzradius ϱ der folgenden Potenzreihen.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3-4^n}\, x^n \qquad \varrho = \boxed{4}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 5e^{4n}\, x^{2n} \qquad \varrho = \boxed{e^{-2}}$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Berechnen Sie:

$$\int \frac{x^3 - x^2 - 6x + 5}{x^2 - x - 6}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[\frac{1}{2}x^2 - \ln|x+2| + \ln|x-3|\right]}$$

Aufgabe 4 (*6 Punkte*) Es sei die Funktion f gegeben durch

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon (x, y) \mapsto 2(x-1)^2 + 4xy^2 + 3$$

Berechnen Sie den Gradienten und die Hessematrix von f:

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{4(x-1) + 4y^2} \\ \boxed{8xy} \end{pmatrix} \qquad \mathrm{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{4} & \boxed{8y} \\ \boxed{8y} & \boxed{8x} \end{pmatrix}$$

Geben Sie alle kritischen Stellen an: $\boxed{(1,0), (0,1), (0,-1)}$

Geben Sie alle Stellen an, an denen Sattelpunkte vorliegen: $\boxed{(0,1), (0,-1)}$

Geben Sie alle Stellen an, an denen lokale Maxima vorliegen: Kommt nicht vor!

Geben Sie alle Stellen an, an denen lokale Minima vorliegen: $\boxed{(1,0)}$

Geben Sie die Taylorentwicklung zweiter Stufe im Punkte $(1,0)$ an:

$$T_2\big(f, (x,y), (1,0)\big) = \boxed{3 + 2(x-1)^2 + 4y^2}$$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie folgende Grenzwerte.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-2}{x+1} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3 - 2x^2}{1 + x + 2x^2} = \boxed{-1}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x}{e^{3x} - 1} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

Aufgabe 6 (*3 Punkte*) Berechnen Sie folgende Integrale.

$$\int (3x+1)\cos(x-1)\,\mathrm{d}\,x \quad = \quad \boxed{\left[(3x+1)\sin(x-1)+3\cos(x-1)\right]}$$

$$\int \cosh(\sin(x))\cos(x)\,\mathrm{d}\,x \quad = \quad \boxed{\left[\sinh(\sin(x))\right]}$$

$$\int 3^{x-1}\,\mathrm{d}\,x \quad = \quad \boxed{\left[\frac{3^{x-1}}{\ln(3)}\right]}$$

Aufgabe 7 (*2 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale. Falls das uneigentliche Integral nicht existiert, tragen Sie „divergent“ ein.

$$\int x\,e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[\quad -e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad\right]} \qquad \int_2^{+\infty} x\,e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\frac{1}{e^2}}$$

Aufgabe 8 (*4 Punkte*) Gegeben ist (für ein geeignetes Intervall I) die Funktion f in Potenzreihendarstellung

$$f\colon I \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} 2n\left(-\frac{3}{5}\right)^n x^{2n-1}\,.$$

(a) Bestimmen Sie die Potenzreihendarstellung einer Stammfunktion F von f.

$$F(x) = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^n x^{2n}}$$

(b) Geben Sie eine geschlossene Darstellung der Funktion F an.

$$F(x) = \boxed{-1+\frac{5}{5+3x^2}}$$

(c) Berechnen Sie daraus eine geschlossene Darstellung von f.

$$f(x) = \boxed{-\frac{30x}{(5+3x^2)^2}}$$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie, falls existent, die jeweiligen Grenzwerte und Summen. Tragen Sie andernfalls „divergent“ ein.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^5+n}} = \boxed{0}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k!} = \boxed{2e-2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k+5^k}{4^k} = \boxed{\text{divergent}}$$

Aufgabe 10 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie alle ersten partiellen Ableitungen der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto e^{2x+y^2+z}\ \ln\left(1+z^2\right).$$

$$f_x(x,y,z) = \boxed{2\,e^{2x+y^2+z}\ \ln\left(1+z^2\right)}$$

$$f_y(x,y,z) = \boxed{2\,y\,e^{2x+y^2+z}\ \ln\left(1+z^2\right)}$$

$$f_z(x,y,z) = \boxed{e^{2x+y^2+z}\left(\frac{2z}{1+z^2} + \ln\left(1+z^2\right)\right)}$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
Punkte	/1	/3	/3	/6	/3	/3	/2	/4	/3	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan(x)$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan(x)$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: $\boxed{}$ **Gruppennr.:** $\boxed{}$

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie den Konvergenzradius ϱ der folgenden Potenzreihen.

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n - 5} x^n \qquad \varrho = \boxed{2}$

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2e^{6n} x^{2n} \qquad \varrho = \boxed{e^{-3}}$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Berechnen Sie:

$$\int \frac{x^4 - x^3 - 6x^2 - 5}{x^2 - x - 6} \,\mathrm{d}\, x = \boxed{\left[\frac{1}{3}x^3 + \ln|x+2| - \ln|x-3|\right]}$$

Aufgabe 4 (*6 Punkte*) Es sei die Funktion f gegeben durch

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x, y) \mapsto 2x^2y + 2(y-8)^2 + 4$$

Berechnen Sie den Gradienten und die Hessematrix von f:

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{4xy} \\ \boxed{2x^2 + 4(y-8)} \end{pmatrix} \qquad \mathrm{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{4y} & \boxed{4x} \\ \boxed{4x} & \boxed{4} \end{pmatrix}$$

Geben Sie alle kritischen Stellen an: $\boxed{(0,8), (4,0), (-4,0)}$

Geben Sie alle Stellen an, an denen Sattelpunkte vorliegen: $\boxed{(4,0), (-4,0)}$

Geben Sie alle Stellen an, an denen lokale Minima vorliegen: $\boxed{(0,8)}$

Geben Sie alle Stellen an, an denen lokale Maxima vorliegen: $\boxed{\text{Kommt nicht vor!}}$

Geben Sie die Taylorentwicklung zweiter Stufe im Punkte $(0,8)$ an:

$$T_2\big(f, (x,y), (0,8)\big) = \boxed{4 + 16x^2 + 2(y-8)^2}$$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie folgende Grenzwerte.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x+1}{x-2} = \boxed{4}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{5-x^2}{-2+x-2x^2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{2x}}{3x} = \boxed{-\frac{2}{3}}$$

Aufgabe 6 (*3 Punkte*) Berechnen Sie folgende Integrale.

$$\int (2x+3)\sin(x-3)\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\big[(-2x-3)\cos(x-3) + 2\sin(x-3)\big]}$$

$$\int \sinh(\cos(x))\sin(x)\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\big[-\cosh(\cos(x))\big]}$$

$$\int 4^{x+1}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[\frac{4^{x+1}}{\ln(4)}\right]}$$

Aufgabe 7 (*2 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale. Falls das uneigentliche Integral nicht existiert, tragen Sie „divergent" ein.

$$\int x\,e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[\quad -e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad\right]} \qquad \int_1^{+\infty} x\,e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\frac{1}{\sqrt{e}}}$$

Aufgabe 8 (*4 Punkte*) Gegeben ist (für ein geeignetes Intervall I) die Funktion f in Potenzreihendarstellung

$$f\colon I \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} 2n\left(-\frac{9}{4}\right)^n x^{2n-1}\,.$$

(a) Bestimmen Sie die Potenzreihendarstellung einer Stammfunktion F von f.

$$F(x) = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{9}{4}\right)^n x^{2n}}$$

(b) Geben Sie eine geschlossene Darstellung der Funktion F an.

$$F(x) = \boxed{-1 + \frac{4}{4+9x^2}}$$

(c) Berechnen Sie daraus eine geschlossene Darstellung von f.

$$f(x) = \boxed{-\frac{72x}{(4+9x^2)^2}}$$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie, falls existent, die jeweiligen Grenzwerte und Summen. Tragen Sie andernfalls „divergent“ ein.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[5]{n}}{\sqrt[4]{n+1}} = \boxed{0}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} = \boxed{e-1}$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{4^k} = \boxed{\frac{4}{5}}$$

Aufgabe 10 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie alle ersten partiellen Ableitungen der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto e^{2x+y+z^2}\, \ln\left(1+x^2\right).$$

$$f_x(x,y,z) = \boxed{2\, e^{2x+y+z^2} \left(\frac{x}{1+x^2} + \ln\left(1+x^2\right)\right)}$$

$$f_y(x,y,z) = \boxed{e^{2x+y+z^2}\, \ln\left(1+x^2\right)}$$

$$f_z(x,y,z) = \boxed{2\, z\, e^{2x+y+z^2}\, \ln\left(1+x^2\right)}$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
Punkte	/1	/3	/3	/6	/3	/3	/2	/4	/3	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan(x)$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\left(\cos(x)\right)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan(x)$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: $\boxed{}$ **Gruppennr.:** $\boxed{}$

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie den Konvergenzradius ϱ der folgenden Potenzreihen.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2-5^n}\,x^n \qquad \varrho = \boxed{5}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3e^{-4n}\,x^{2n} \qquad \varrho = \boxed{e^2}$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Berechnen Sie:

$$\int \frac{x^3+x^2-6x-5}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[\frac{1}{2}\,x^2 - \ln|x-2| + \ln|x+3|\right]}$$

Aufgabe 4 (*6 Punkte*) Es sei die Funktion f gegeben durch

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto 2(x-2)^2 + 2xy^2 + 2$$

Berechnen Sie den Gradienten und die Hessematrix von f:

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 4(x-2)+2y^2 \\ 4xy \end{pmatrix} \qquad \mathrm{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & 4y \\ 4y & 4x \end{pmatrix}$$

Geben Sie alle kritischen Stellen an: $(2,0), (0,2), (0,-2)$

Geben Sie alle Stellen an, an denen Sattelpunkte vorliegen: $(0,2), (0,-2)$

Geben Sie alle Stellen an, an denen lokale Maxima vorliegen: Kommt nicht vor!

Geben Sie alle Stellen an, an denen lokale Minima vorliegen: $(2,0)$

Geben Sie die Taylorentwicklung zweiter Stufe im Punkte $(2,0)$ an:

$$T_2\big(f,(x,y),(2,0)\big) = \boxed{2 + 2(x-2)^2 + 4y^2}$$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie folgende Grenzwerte.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x+2}{x-1} = \boxed{\frac{5}{2}}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2-3x^2}{1-2x+x^2} = \boxed{-3}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x}{e^{2x}-1} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

Aufgabe 6 (*3 Punkte*) Berechnen Sie folgende Integrale.

$$\int (3x-1)\sin(x+1)\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\big[(-3x+1)\cos(x+1)+3\sin(x+1)\big]}$$

$$\int \cosh(\cos(x))\sin(x)\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\big[-\sinh(\cos(x))\big]}$$

$$\int 5^{x+1}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[\frac{5^{x+1}}{\ln(5)}\right]}$$

Aufgabe 7 (*2 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale. Falls das uneigentliche Integral nicht existiert, tragen Sie „divergent" ein.

$$\int 2\,x\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\Big[\quad -e^{-x^2} \quad\Big]} \qquad \int_2^{+\infty} 2\,x\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\frac{1}{e^4}}$$

Aufgabe 8 (*4 Punkte*) Gegeben ist (für ein geeignetes Intervall I) die Funktion f in Potenzreihendarstellung

$$f\colon I \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} 2n\left(-\frac{5}{3}\right)^n x^{2n-1}.$$

(a) Bestimmen Sie die Potenzreihendarstellung einer Stammfunktion F von f.

$$F(x) = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{5}{3}\right)^n x^{2n}}$$

(b) Geben Sie eine geschlossene Darstellung der Funktion F an.

$$F(x) = \boxed{-1+\frac{3}{3+5x^2}}$$

(c) Berechnen Sie daraus eine geschlossene Darstellung von f.

$$f(x) = \boxed{-\frac{30x}{(3+5x^2)^2}}$$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie, falls existent, die jeweiligen Grenzwerte und Summen. Tragen Sie andernfalls „divergent“ ein.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)(n+2)}{\sqrt{(n+1)^3}} = \boxed{\text{divergent}}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(k-1)!} = \boxed{2e}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k = \boxed{3}$$

Aufgabe 10 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie alle ersten partiellen Ableitungen der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto e^{x+y^2+2z}\ \ln\left(1+z^2\right).$$

$$f_x(x,y,z) = \boxed{e^{x+y^2+2z}\ \ln\left(1+z^2\right)}$$

$$f_y(x,y,z) = \boxed{2\,y\,e^{x+y^2+2z}\ \ln\left(1+z^2\right)}$$

$$f_z(x,y,z) = \boxed{2\,e^{x+y^2+2z}\left(\frac{z}{1+z^2} + \ln\left(1+z^2\right)\right)}$$