

Name,

Matrikel-

Studien-

Vorname:

Nummer:

gang:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/4	/2	/6	/4	/4	/4	/3	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.  
Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

*Viel Erfolg!*

**Aufgabe 1** (1 Punkt) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:

Gruppennr.:

**Aufgabe 2** (4 Punkte) Konstruieren Sie zu den Vektoren

$$v_1 = (-1, 1, 1)^T,$$

$$v_2 = (2, 1, -2)^T,$$

$$v_3 = (1, 3, 1)^T$$

eine Orthonormalbasis  $F: f_1, f_2, f_3$  von  $\mathbb{R}^3$  mit  $L(v_1) = L(f_1)$ ,  $L(v_1, v_2) = L(f_1, f_2)$  und  $L(v_1, v_2, v_3) = L(f_1, f_2, f_3)$ .

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 3** (2 Punkte) Es ist die affine Abbildung  $\alpha : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : v \mapsto Av + t$  gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 6 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Weiter ist die Gerade

$$g := \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

gegeben. Bestimmen Sie

$$\alpha(g) = \left\{ \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ -12 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

**Aufgabe 4** (6 Punkte) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Verifizieren Sie, dass  $v_1 = (2, 0, 1)^T$  ein Eigenvektor von  $A$  ist. Wie lautet der zugehörige Eigenwert  $\lambda_1$ ?  $\lambda_1 = \boxed{2}$
- (b) Der zu  $\lambda_1$  gehörige Eigenraum  $V(\lambda_1)$  ist zweidimensional. Geben Sie eine orthogonale Basis von  $V(\lambda_1)$  an:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- (c) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^3$  aus Eigenvektoren von  $A$ :

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die zugehörigen Eigenwerte an (achten Sie dabei auf korrekte Zuordnung):

$$\boxed{2}, \quad \boxed{2}, \quad \boxed{-4}.$$

**Aufgabe 5** (4 Punkte) Gegeben sind die Punkte  $P = (-1, 1)$  und  $Q = (-1, -4)$  sowie die Koordinatensysteme

$$\mathbb{F} = \left( P; \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \mathbb{G} = \left( Q; \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$$

Bestimmen Sie die Koordinatentransformation, welche von  $\mathbb{F}$ -Koordinaten auf Standardkoordinaten  $\mathbb{E}$  umrechnet, sowie die Koordinatentransformation von  $\mathbb{E}$  auf  $\mathbb{G}$ .

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = \begin{pmatrix} 4/5 & 1/5 \\ 3/5 & 2/5 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 8/5 \\ 11/5 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 6** (4 Punkte) Bestimmen Sie die Eigenwerte der gegebenen Matrizen und entscheiden Sie, ob die Matrizen diagonalisierbar sind.

	Eigenwerte	diagonalisierbar
$\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$	$-3 + 4i, -3 - 4i$	ja
$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$	$-2, 5$	ja
$\begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & -1 \end{pmatrix}$	$-\frac{2}{3}$	nein

**Aufgabe 7** (4 Punkte) Bestimmen Sie zu den folgenden Quadriken jeweils eine euklidische Normalform:

$$Q_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 12x_2x_3 + 11 = 0 \right\}$$

$$\frac{2}{11}x_1^2 - \frac{5}{11}x_2^2 + \frac{7}{11}x_3^2 + 1 = 0$$

$$Q_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 4x_2 - 8x_3 = 0 \right\}$$

$$\frac{1}{14}y_1^2 + \frac{1}{7}y_2^2 - \frac{1}{14}y_3^2 + 1 = 0$$

**Aufgabe 8** (3 Punkte) Entscheiden Sie, ob die folgenden Folgen beschränkt, monoton oder konvergent sind. Tragen Sie alle Ihre Entscheidungen in den Kästen ein.

	Eigenschaften
$a_n = \frac{1}{n^2 + 5}$	beschränkt, monoton, konvergent
$b_0 = 5, b_n = -\frac{1}{2}b_{n-1}$	beschränkt, nicht monoton, konvergent
$a_n = 2^n$	unbeschränkt, monoton, divergent

**Aufgabe 9** (3 Punkte) Berechnen Sie die Grenzwerte der gegebenen Folgen. Falls die Folge nicht konvergiert, tragen Sie "divergent" ein.

$\left(\frac{2+n^2}{3n^2-11}\right)_{n \in \mathbb{N}}$	$(2^{-n}n!)_{n \in \mathbb{N}}$	$\left(\sum_{k=0}^n \frac{3^k}{2^k}\right)_{n \in \mathbb{N}}$
$\frac{1}{3}$	divergent	divergent