Name, Vorname:

Matrikel-Nummer:

Studien-gang:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/4	/3	/4	/6	/5	/5	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen könnten hilfreich sein:

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan(x)$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\, x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan(x)$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\, b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a, b \in \mathbb{R},\ b > 0$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:

Gruppennr.:

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte. Tragen Sie „divergent“ ein, falls kein Grenzwert existiert.

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{4k-3} = \boxed{\text{divergent}} \qquad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=3}^{n} \frac{3^k}{(k-3)!} = \boxed{27e^3}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+(-1)^n}{3n} = \boxed{\frac{2}{3}} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{1-x^5} = \boxed{-\frac{1}{5}}$$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Geben Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Radius $\rho \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ des Konvergenzkreises an.

	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{4^k}$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k k!(2+z)^k$	$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z-3+i}{k}\right)^k$
z_0	0	-2	$3-i$
ρ	2	0	∞

Aufgabe 4 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$$

die erste und zweite Ableitung:

$$f'(x) = \boxed{e^{-\frac{x^2}{2}}(2x - x^3)}$$

$$f''(x) = \boxed{e^{-\frac{x^2}{2}}(2 - 5x^2 + x^4)}$$

Stellen Sie das Taylorpolynom $T_2(f, x, x_0)$ der Stufe 2 um den Punkt $x_0 = 2$ auf.

$$T_2(f, x, 2) = \boxed{\frac{1}{e^2}\left(4 - 4(x-2) - (x-2)^2\right)}$$

Aufgabe 5 (*6 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int x e^{\frac{x}{2}} \, \mathrm{d}\, x = \boxed{\left[e^{\frac{x}{2}}(2x-4)\right]}$$

$$\int \left(1 + 2(\cos x)^3\right) \mathrm{d}\, x = \boxed{\left[x + 2\sin x - \frac{2}{3}(\sin x)^3\right]}$$

$$\int \frac{x-3}{x^2 - 3x + 2} \, \mathrm{d}\, x = \boxed{\left[2\ln|x-1| - \ln|x-2|\right]}$$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto (y^2-4x)(x-9)$$

den Gradienten und die Hesse-Matrix.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{-8x+36+y^2} \\ \boxed{2y(x-9)} \end{pmatrix} \quad \mathrm{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{-8} & \boxed{2y} \\ \boxed{2y} & \boxed{2(x-9)} \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f sowie deren Typ.

Maximum bei $\left(\frac{9}{2}, 0\right)$, Sattelpunkte bei $(9,6), (9,-6)$

Aufgabe 7 (*5 Punkte*) Gegeben ist das Vektorfeld

$$g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4\colon \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} xy \\ wy + \cos(xyz)yz - e^{y-z} \\ wx + \cos(xyz)xz - xe^{y-z} \\ \cos(xyz)xy + xe^{y-z} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ein Potential U von g.

$$U(w,x,y,z) = \boxed{wxy + \sin(xyz) - xe^{y-z}}$$

Geben Sie ein Vektorfeld h an, das das Potential

$$V\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto y + x\ln\left(xy^3\right)$$

besitzt.

$$h(x,y) = \begin{pmatrix} \ln\left(xy^3\right) + 1 \\ 1 + 3\,\dfrac{x}{y} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8 (*3 Punkte*) Berechnen Sie Divergenz, Rotation und Jacobimatrix des Vektorfeldes
$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} (e^{x^2})y \\ \sin(xy) \\ x^2 \end{pmatrix}$.

$$\operatorname{div} f(x,y,z) = \boxed{2xy(e^{x^2}) + x\cos(xy)}$$

$$\operatorname{rot} f(x,y,z) = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -2x \\ y\cos(xy) - (e^{x^2}) \end{pmatrix}} \qquad \mathrm{J}\, f(x,y,z) = \boxed{\begin{pmatrix} 2xy(e^{x^2}) & (e^{x^2}) & 0 \\ y\cos(xy) & x\cos(xy) & 0 \\ 2x & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/4	/3	/4	/6	/5	/5	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen könnten hilfreich sein:

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan(x)$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan(x)$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a, b \in \mathbb{R},\ b > 0$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte. Tragen Sie „divergent“ ein, falls kein Grenzwert existiert.

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^{k+2} = \boxed{\tfrac{9}{4}} \qquad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{11k-5} = \boxed{\text{divergent}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n+(-1)^n}{2n} = \boxed{\frac{3}{2}} \qquad \lim_{x\to1} \frac{\ln(x)}{1-x^4} = \boxed{-\frac{1}{4}}$$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Geben Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Radius $\rho \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ des Konvergenzkreises an.

	$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z-1+i}{k}\right)^k$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{3^k}$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k k!(7+z)^k$
z_0	$1-i$	0	-7
ρ	∞	$\sqrt{3}$	0

Aufgabe 4 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^2 e^{-x^2}$$

die erste und zweite Ableitung:

$$f'(x) = \boxed{2e^{-x^2}(x - x^3)}$$

$$f''(x) = \boxed{2e^{-x^2}(1 - 5x^2 + 2x^4)}$$

Stellen Sie das Taylorpolynom $T_2(f, x, x_0)$ der Stufe 2 um den Punkt $x_0 = 2$ auf.

$$T_2(f, x, 2) = \boxed{\frac{1}{e^4}\left(4 - 12(x-2) + 13(x-2)^2\right)}$$

Aufgabe 5 (*6 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int x e^{2x} \,\mathrm{d}\, x = \boxed{\left[e^{2x}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)\right]}$$

$$\int \left(1 - 2(\sin x)^3\right) \mathrm{d}\, x = \boxed{\left[x + 2\cos x - \frac{2}{3}(\cos x)^3\right]}$$

$$\int \frac{x-5}{x^2 - x - 2} \,\mathrm{d}\, x = \boxed{\left[2\ln|x+1| - \ln|x-2|\right]}$$

Aufgabe 6 (5 *Punkte*) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto (y^2+4x)(x+9)$$

den Gradienten und die Hesse-Matrix.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{8x+36+y^2} \\ \boxed{2y(x+9)} \end{pmatrix} \qquad \mathrm{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{8} & \boxed{2y} \\ \boxed{2y} & \boxed{2(x+9)} \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f sowie deren Typ.

$$\boxed{\text{Minimum bei } \left(-\frac{9}{2}, 0\right), \quad \text{Sattelpunkte bei } (-9,6), (-9,-6)}$$

Aufgabe 7 (5 *Punkte*) Gegeben ist das Vektorfeld

$$g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4\colon \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} xz \\ wz + \cos(xyz)yz - ye^{x-z} \\ \cos(xyz)xz - e^{x-z} \\ wx + \cos(xyz)xy + ye^{x-z} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ein Potential U von g.

$$U(w,x,y,z) = \boxed{wxz + \sin(xyz) - ye^{x-z}}$$

Geben Sie ein Vektorfeld h an, das das Potential

$$V\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto y + y\ln\left(x^2 y\right)$$

besitzt.

$$h(x,y) = \boxed{\begin{pmatrix} 2\,\dfrac{y}{x} \\ 2 + \ln\left(x^2 y\right) \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 8 (*3 Punkte*) Berechnen Sie Divergenz, Rotation und Jacobimatrix des Vektorfeldes
$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} e^x y \\ \sin(x^2 y) \\ y^2 \end{pmatrix}$.

$$\operatorname{div} f(x,y,z) = \boxed{ye^x + x^2\cos(x^2y)}$$

$$\operatorname{rot} f(x,y,z) = \boxed{\begin{pmatrix} 2y \\ 0 \\ 2xy\cos(x^2y) - e^x \end{pmatrix}} \qquad \mathrm{J}\, f(x,y,z) = \boxed{\begin{pmatrix} ye^x & e^x & 0 \\ 2xy\cos(x^2y) & x^2\cos(x^2y) & 0 \\ 0 & 2y & 0 \end{pmatrix}}$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/4	/3	/4	/6	/5	/5	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen könnten hilfreich sein:

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan(x)$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan(x)$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a, b \in \mathbb{R},\ b > 0$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte. Tragen Sie „divergent“ ein, falls kein Grenzwert existiert.

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{6k-5} = \boxed{\text{divergent}} \qquad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{5}{9}\right)^{k+1} = \boxed{\tfrac{5}{4}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n+(-1)^n}{4n} = \boxed{\frac{3}{4}} \qquad \lim_{x\to1} \frac{\ln(x)}{1-x^3} = \boxed{-\frac{1}{3}}$$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Geben Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Radius $\rho \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ des Konvergenzkreises an.

	$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k k!(3+z)^k$	$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z+i-1}{k}\right)^k$	$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{9^k}$
z_0	-3	$1-i$	0
ρ	0	∞	3

Aufgabe 4 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto -x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$$

die erste und zweite Ableitung:

$$f'(x) = \boxed{-e^{-\frac{x^2}{2}}(2x - x^3)}$$

$$f''(x) = \boxed{-e^{-\frac{x^2}{2}}(2 - 5x^2 + x^4)}$$

Stellen Sie das Taylorpolynom $T_2(f, x, x_0)$ der Stufe 2 um den Punkt $x_0 = 2$ auf.

$$T_2(f, x, 2) = \boxed{\frac{1}{e^2}\left(-4 + 4(x-2) + (x-2)^2\right)}$$

Aufgabe 5 (*6 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int x e^{\frac{x}{3}}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[e^{\frac{x}{3}}(3x-9)\right]}$$

$$\int \left(2 - (\cos x)^3\right)\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[2x - \sin x + \frac{1}{3}(\sin x)^3\right]}$$

$$\int \frac{x+3}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[2\ln|x+1| - \ln|x+2|\right]}$$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto (y^2 - 9x)(x-9)$$

den Gradienten und die Hesse-Matrix.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{-18x + 81 + y^2} \\ \boxed{2y(x-9)} \end{pmatrix} \qquad \mathrm{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{-18} & \boxed{2y} \\ \boxed{2y} & \boxed{2(x-9)} \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f sowie deren Typ.

$$\boxed{\text{Maximum bei } \left(\frac{9}{2}, 0\right), \quad \text{Sattelpunkte bei } (9,9), (9,-9)}$$

Aufgabe 7 (*5 Punkte*) Gegeben ist das Vektorfeld

$$g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4\colon \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} xy \\ wy - \sin(xyz)yz \\ wx - \sin(xyz)xz + ze^{y-z} \\ -\sin(xyz)xy + e^{y-z} - ze^{y-z} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ein Potential U von g.

$$U(w,x,y,z) = \boxed{wxy + \cos(xyz) + ze^{y-z}}$$

Geben Sie ein Vektorfeld h an, das das Potential

$$V\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x + x\ln\left(xy^3\right)$$

besitzt.

$$h(x,y) = \boxed{\begin{pmatrix} 2 + \ln\left(xy^3\right) \\ 3\,\dfrac{x}{y} \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 8 (*3 Punkte*) Berechnen Sie Divergenz, Rotation und Jacobimatrix des Vektorfeldes
$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} (e^{y^2})x \\ \sin(xy) \\ y^2 \end{pmatrix}.$

$$\operatorname{div} f(x,y,z) = \boxed{(e^{y^2}) + x\cos(xy)}$$

$$\operatorname{rot} f(x,y,z) = \boxed{\begin{pmatrix} 2y \\ 0 \\ y\cos(xy) - 2xy(e^{y^2}) \end{pmatrix}} \qquad \mathrm{J}\, f(x,y,z) = \boxed{\begin{pmatrix} (e^{y^2}) & 2xy(e^{y^2}) & 0 \\ y\cos(xy) & x\cos(xy) & 0 \\ 0 & 2y & 0 \end{pmatrix}}$$

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studien-gang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/4	/3	/4	/6	/5	/5	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen könnten hilfreich sein:

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan(x)$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan(x)$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a, b \in \mathbb{R},\ b > 0$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte. Tragen Sie „divergent“ ein, falls kein Grenzwert existiert.

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(-2)^k (k-2)!} = \boxed{\frac{1}{4\sqrt{e}}} \qquad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{7}{6k-5} = \boxed{\text{divergent}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4n+(-1)^n}{3n} = \boxed{\frac{4}{3}} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{1-x^2} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Geben Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Radius $\rho \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ des Konvergenzkreises an.

	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{7^k}$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k k!(5+z)^k$	$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z-i+2}{k}\right)^k$
z_0	0	-5	$i-2$
ρ	$\sqrt{7}$	0	∞

Aufgabe 4 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto -x^2 e^{-x^2}$$

die erste und zweite Ableitung:

$$f'(x) = \boxed{-2e^{-x^2}(x - x^3)}$$

$$f''(x) = \boxed{-2e^{-x^2}(1 - 5x^2 + 2x^4)}$$

Stellen Sie das Taylorpolynom $T_2(f, x, x_0)$ der Stufe 2 um den Punkt $x_0 = 2$ auf.

$$T_2(f, x, 2) = \boxed{\frac{1}{e^4}\left(-4 + 12(x-2) - 13(x-2)^2\right)}$$

Aufgabe 5 (*6 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int x e^{3x} \,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[e^{3x}\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right)\right]}$$

$$\int \left(2 + (\sin x)^3\right) \mathrm{d}\,x = \boxed{\left[2x - \cos x + \frac{1}{3}(\cos x)^3\right]}$$

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2} \,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[2\ln|x-1| - \ln|x+2|\right]}$$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto (y^2+9x)(x+9)$$

den Gradienten und die Hesse-Matrix.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{18x+81+y^2} \\ \boxed{2y(x+9)} \end{pmatrix} \quad \mathrm{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{18} & \boxed{2y} \\ \boxed{2y} & \boxed{2(x+9)} \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f sowie deren Typ.

$$\boxed{\text{Minimum bei } \left(-\frac{9}{2},0\right), \quad \text{Sattelpunkte bei } (-9,9), (-9,-9)}$$

Aufgabe 7 (*5 Punkte*) Gegeben ist das Vektorfeld

$$g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4\colon \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} yz \\ \cos(xyz)yz + ye^{z-x} \\ wz + \cos(xyz)xz - e^{z-x} \\ wy + \cos(xyz)xy - ye^{z-x} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ein Potential U von g.

$$U(w,x,y,z) = \boxed{wyz + \sin(xyz) - ye^{z-x}}$$

Geben Sie ein Vektorfeld h an, das das Potential

$$V\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x + y\ln\left(x^2y\right)$$

besitzt.

$$h(x,y) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 + 2\,\dfrac{y}{x} \\ \ln\left(x^2y\right) + 1 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 8 (*3 Punkte*) Berechnen Sie Divergenz, Rotation und Jacobimatrix des Vektorfeldes

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} e^y x \\ \sin(xy^2) \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

$$\operatorname{div} f(x,y,z) = \boxed{e^y + 2xy\cos(xy^2)}$$

$$\operatorname{rot} f(x,y,z) = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -2x \\ y^2\cos(xy^2) - xe^y \end{pmatrix}} \qquad \mathrm{J}\, f(x,y,z) = \boxed{\begin{pmatrix} e^y & xe^y & 0 \\ y^2\cos(xy^2) & 2xy\cos(xy^2) & 0 \\ 2x & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$