Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
Punkte	/1	/3	/3	/4	/5	/5	/3	/4	/2	/2	/32

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen und Stammfunktionen könnten hilfreich sein:

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan(x)$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan(x)$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a, b \in \mathbb{R},\ b > 0$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: $\boxed{}$ **Gruppennr.:** $\boxed{}$

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie folgende Grenzwerte.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \boxed{\frac{1}{2}} \qquad \lim_{x\to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4}\right) = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{5}{9}\right)^{k+1} = \boxed{\frac{5}{4}}$$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Geben Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Radius $\rho \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ des Konvergenzkreises an.

	$\sum_{k=0}^{\infty} (k^2 - k + 4)(z + 5i)^k$	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z-i)^{3k}}{27^k}$	$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(z+i-1)^k}{(k-2)!}$
z_0	$-5i$	i	$1 - i$
ρ	1	3	∞

Aufgabe 4 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto e^{\sin(x/2)}$$

die erste und zweite Ableitung:

$$f'(x) = \frac{1}{2} e^{\sin(x/2)} \cos(x/2)$$

$$f''(x) = \frac{1}{4} e^{\sin(x/2)} \left((\cos(x/2))^2 - \sin(x/2) \right)$$

Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f sowie deren Typ:

Minima bei $x = -\pi + 4\pi\mathbb{Z}$, Maxima bei $x = \pi + 4\pi\mathbb{Z}$

Aufgabe 5 (*5 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale. Falls ein uneigentliches Integral nicht existiert, tragen Sie „divergent“ ein.

$$\int \frac{1}{x(1 + \ln x)} \, \mathrm{d}\, x = \left[\ln |1 + \ln x| \right]$$

$$\int e^{-x} \cos(2x) \, \mathrm{d}\, x = \left[-\frac{1}{5} e^{-x} \left(\cos(2x) - 2\sin(2x) \right) \right]$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(2x) \, \mathrm{d}\, x = \frac{1}{5}$$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \sin(x+e^y)$$

den Gradienten und die Hesse-Matrix.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{\cos(x+e^y)} \\ \boxed{e^y\cos(x+e^y)} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{-\sin(x+e^y)} & \boxed{-e^y\sin(x+e^y)} \\ \boxed{-e^y\sin(x+e^y)} & \boxed{-e^{2y}\sin(x+e^y)+e^y\cos(x+e^y)} \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 zum Entwicklungspunkt $(-1,0)$.

$$T_2\big(f,(x,y),(-1,0)\big) = \boxed{(x+1)+y+\frac{1}{2}y^2}$$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) Berechnen Sie Divergenz, Jacobimatrix und Rotation der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} \sin(x)\sin(x+y) \\ \ln(x)\ln(x+y) \\ x(x+y) \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} f(x,y,z) = \boxed{\sin(x)\cos(x+y)+\cos(x)\sin(x+y)+\ln(x)\tfrac{1}{x+y}}$$

$$\mathrm{J}\, f(x,y,z) = \boxed{\begin{pmatrix} \sin(x)\cos(x+y)+\cos(x)\sin(x+y) & \sin(x)\cos(x+y) & 0 \\ \ln(x)\tfrac{1}{x+y}+\tfrac{1}{x}\ln(x+y) & \ln(x)\tfrac{1}{x+y} & 0 \\ 2x+y & x & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\operatorname{rot} f(x,y,z) = \boxed{\begin{pmatrix} x \\ -2x-y \\ \ln(x)\tfrac{1}{x+y}+\tfrac{1}{x}\ln(x+y)-\sin(x)\cos(x+y) \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 8 (*4 Punkte*)

(a) Gegeben ist das Vektorfeld

$$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\left(e^{xyz}\right) e^{xyz} yz \\ \cos\left(e^{xyz}\right) e^{xyz} xz \\ \cos\left(e^{xyz}\right) e^{xyz} xy \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ein Potential U von g.

$$U(x,y,z) = \boxed{\sin\left(e^{xyz}\right)}$$

(b) Geben Sie ein Vektorfeld h an, welches das Potential

$$V\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \frac{e^{xy}}{xy}$$

besitzt.

$$h(x,y) = \boxed{e^{xy} \begin{pmatrix} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2 y} \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{x y^2} \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 9 (*2 Punkte*) Gegeben seien ein Vektorfeld $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sowie die Kurve $C\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie

die Zirkulation von f längs C $\boxed{0}$ und

den Ausfluss durch C $\boxed{2\pi}$

Aufgabe 10 (*2 Punkte*) Gegeben seien das Vektorfeld f sowie die Kurve C:

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} xy \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie $C'(t) = \boxed{\begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix}}$ und $\int_C f(x) \bullet \mathrm{d}\,x = \boxed{\tfrac{4}{5} + 2}$
