Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studien-gang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/3	/3	/3	/7	/5	/3	/3	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Die Ebene E ist gegeben durch die Gleichung $-x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$.

(a) Geben Sie die Hessesche Normalform für E an:
$$\frac{1}{\sqrt{6}} \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

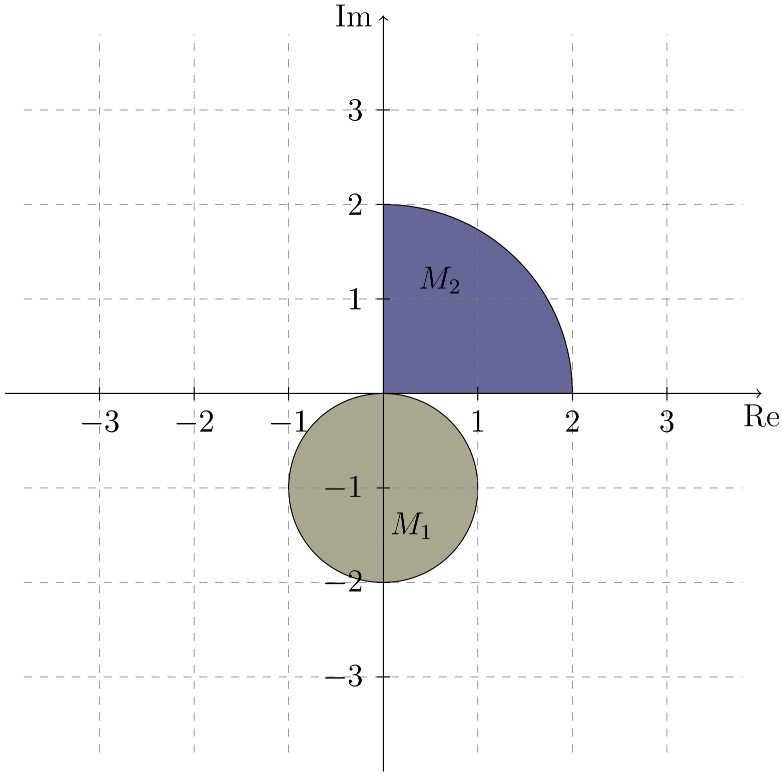
(b) Welchen Abstand hat E vom Ursprung? $\frac{1}{\sqrt{6}}$

(c) Bestimmen Sie den Abstand des Punkts $B = \begin{pmatrix} 3, & 2, & 5 \end{pmatrix}$ von E : $\frac{5}{\sqrt{6}}$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 = \{z \in \mathbb{C}: \ \mathrm{Im}\left(\frac{2}{z}\right) \geqq 1\}, \quad M_2 = \{z \in \mathbb{C}: \ z\bar{z} \leqq 4 \ \text{ und } \ 0 \leqq \arg(z) \leqq \tfrac{\pi}{2}\}$$

in der Gaußschen Zahlenebene.



Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Gegeben ist die Pyramide mit den Eckpunkten

$$A := \begin{pmatrix} 1, & 1, & -1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1, & 3, & -2 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 2, & 1, & -5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D := \begin{pmatrix} 8, & 3, & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie einen Normalenvektor $\vec{n}$ (der Länge 1) auf der Seite ABD und berechnen Sie die Fläche F dieser Seite.

$$\vec{n} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{249}} \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -14 \end{pmatrix}} \qquad F = \boxed{\frac{\sqrt{249}}{2}}$$

Aufgabe 5 (*7 Punkte*)

Bestimmen Sie jeweils alle $x \in \mathbb{R}$, für die folgende Ungleichungen erfüllt sind:

(a) $\left|\dfrac{1}{x}\right| + \dfrac{5}{3x} \geqq 8$

$x \in$ $\left(0, \dfrac{1}{3}\right]$

(b) $|x+1| - 3x \leqq \Big|3x - |x+1|\Big|$

$x \in$ $\mathbb{R}$

(c) $\dfrac{x^2-1}{x+2} \geqq 0$

$x \in$ $(-2,-1] \cup [1,+\infty)$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Gegeben ist das reelle, lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix A. $\det A =$ $2 + 3\alpha$

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das System eine eindeutige Lösung? $\alpha \neq -\dfrac{2}{3}$

Berechnen Sie diese Lösung. $x = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2+3\alpha} \\ \dfrac{2}{2+3\alpha} \\ \dfrac{3}{2+3\alpha} \end{pmatrix}$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \\ -1 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie: $\operatorname{Rg} A = \boxed{2}$ $\quad \det B = \boxed{40}$ $\quad \det(AB) = \boxed{0}$

Aufgabe 8 (*3 Punkte*) Gegeben sind die folgenden Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ e & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & -1 \\ 1 & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie, wenn möglich, die folgenden Matrizen. Tragen Sie „existiert nicht“ in den Kasten ein, falls die Operation nicht möglich ist.

$$A^\mathsf{T} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & e \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}} \qquad BB^\mathsf{T} = \boxed{\begin{pmatrix} 1+2\,\mathrm{i} & 2\,\mathrm{i} \\ 2\,\mathrm{i} & 1-2\,\mathrm{i} \end{pmatrix}} \qquad C^{-1} = \boxed{\text{existiert nicht}}$$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Gegeben sei die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \varphi\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die Matrixdarstellung von φ bezüglich der Standardbasis E an.

$${}_E\varphi_E = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}}$$

(b) Bestimmen Sie das Bild von $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ unter φ. $\qquad \varphi(x) = \boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ -14 \end{pmatrix}}$

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studiengang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/3	/3	/3	/7	/5	/3	/3	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Die Ebene E ist gegeben durch die Gleichung $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1$.

(a) Geben Sie die Hessesche Normalform für E an:

$$\frac{1}{\sqrt{14}} \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \, x \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

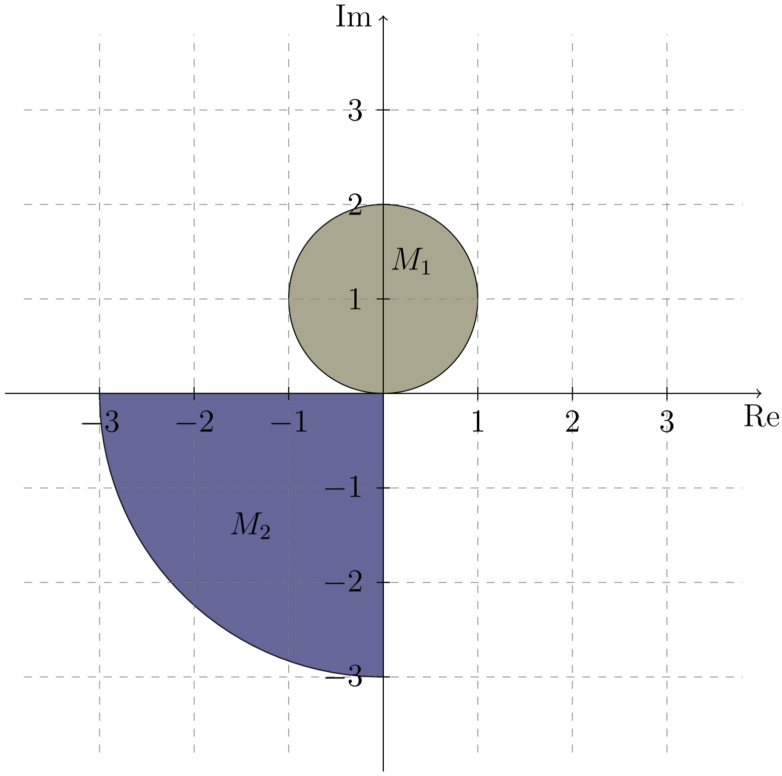
(b) Welchen Abstand hat E vom Ursprung? $\frac{1}{\sqrt{14}}$

(c) Bestimmen Sie den Abstand des Punkts $B = \begin{pmatrix} 5, & 1, & 4 \end{pmatrix}$ von E : $\frac{8}{\sqrt{14}}$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 = \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Im}\left(-\frac{2}{z}\right) \geqq 1\}, \quad M_2 = \{z \in \mathbb{C} : \ z\bar{z} \leqq 9 \ \text{ und } \ \pi \leqq \arg(z) \leqq \tfrac{3\pi}{2}\}$$

in der Gaußschen Zahlenebene.



Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Gegeben ist die Pyramide mit den Eckpunkten

$$A := \begin{pmatrix} 1, & 2, & -2 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 3, & 6, & 3 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} -2, & 2, & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D := \begin{pmatrix} 0, & -1, & 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie einen Normalenvektor $\vec{n}$ (der Länge 1) auf der Seite CDA und berechnen Sie die Fläche F dieser Seite.

$$\vec{n} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{406}}\begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}} \qquad F = \boxed{\frac{\sqrt{406}}{2}}$$

Aufgabe 5 (*7 Punkte*)

Bestimmen Sie jeweils alle $x \in \mathbb{R}$, für die folgende Ungleichungen erfüllt sind:

(a) $2x - |x+3| \leqq \Big| |x+3| - 2x \Big|$

$x \in \boxed{\mathbb{R}}$

(b) $\left|\dfrac{1}{x}\right| + \dfrac{7}{2x} \geqq 9$

$x \in \boxed{\left(0, \dfrac{1}{2}\right]}$

(c) $\dfrac{x^2-4}{3-x} \geqq 0$

$x \in \boxed{(-\infty, -2] \cup [2, 3)}$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Gegeben ist das reelle, lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix A. $\det A = \boxed{2 + 5\alpha}$

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das System eine eindeutige Lösung? $\boxed{\alpha \neq -\dfrac{2}{5}}$

Berechnen Sie diese Lösung. $x = \boxed{\begin{pmatrix} \dfrac{5}{2+5\alpha} \\ -\dfrac{2}{2+5\alpha} \\ \dfrac{1}{2+5\alpha} \end{pmatrix}}$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie: $\det A = \boxed{-23}$ $\quad \operatorname{Rg} B = \boxed{2}$ $\quad \det(AB) = \boxed{0}$

Aufgabe 8 (*3 Punkte*) Gegeben sind die folgenden Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \ln 5 \\ 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1-\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie, wenn möglich, die folgenden Matrizen. Tragen Sie „existiert nicht“ in den Kasten ein, falls die Operation nicht möglich ist.

$$A^{\mathsf{T}} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ \ln 5 & 4 & -2 \end{pmatrix}} \qquad B^{\mathsf{T}} B = \boxed{\begin{pmatrix} 1+2\,\mathrm{i} & 2 \\ 2 & 1-2\,\mathrm{i} \end{pmatrix}} \qquad C^{-1} = \boxed{\text{existiert nicht}}$$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Gegeben sei die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \varphi\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die Matrixdarstellung von φ bezüglich der Standardbasis E an.

$${}_E\varphi_E = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}$$

(b) Bestimmen Sie das Bild von $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ unter φ. $\qquad \varphi(x) = \boxed{\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}}$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/3	/3	/3	/7	/5	/3	/3	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: $\boxed{}$ **Gruppennr.:** $\boxed{}$

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Die Ebene E ist gegeben durch die Gleichung $4x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$.

(a) Geben Sie die Hessesche Normalform für E an:
$$\frac{1}{\sqrt{21}}\left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle|\, x \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{21}}$$

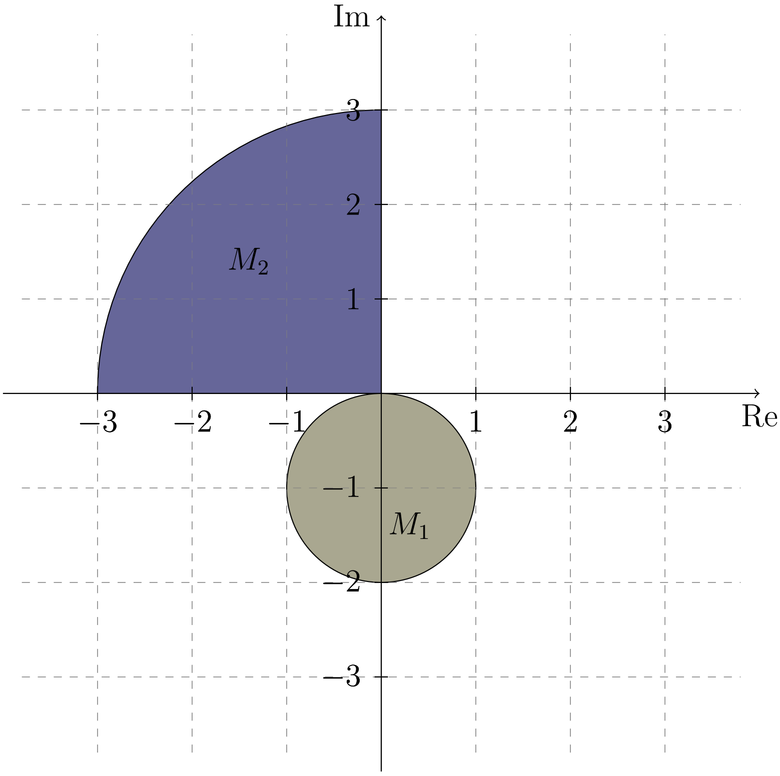
(b) Welchen Abstand hat E vom Ursprung? $\boxed{\frac{1}{\sqrt{21}}}$

(c) Bestimmen Sie den Abstand des Punkts $B = \begin{pmatrix} 3, & -2, & 1 \end{pmatrix}$ von E : $\boxed{\frac{15}{\sqrt{21}}}$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 = \{z \in \mathbb{C}: \ \mathrm{Im}\left(\frac{2}{z}\right) \geqq 1\}, \quad M_2 = \{z \in \mathbb{C}: \ z\bar{z} \leqq 9 \ \text{ und } \ \tfrac{\pi}{2} \leqq \arg(z) \leqq \pi\}$$

in der Gaußschen Zahlenebene.



Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Gegeben ist die Pyramide mit den Eckpunkten

$$A := \begin{pmatrix} 2, & 2, & -1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2, & 3, & -3 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 0, & -1, & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D := \begin{pmatrix} -6, & 2, & 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie einen Normalenvektor $\vec{n}$ (der Länge 1) auf der Seite ABD und berechnen Sie die Fläche F dieser Seite.

$$\vec{n} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{345}}\begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix}} \qquad F = \boxed{\frac{\sqrt{345}}{2}}$$

Aufgabe 5 (*7 Punkte*)

Bestimmen Sie jeweils alle $x \in \mathbb{R}$, für die folgende Ungleichungen erfüllt sind:

(a) $\left|\frac{1}{x}\right| + \frac{5}{4x} \geqq 9$

$x \in$ $\boxed{\left(0, \frac{1}{4}\right]}$

(b) $\frac{1-x^2}{x-3} \geqq 0$

$x \in$ $\boxed{(-\infty, -1] \cup [1, 3)}$

(c) $5x + |x-1| \leqq \big||x-1| + 5x\big|$

$x \in$ $\boxed{\mathbb{R}}$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Gegeben ist das reelle, lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix A. $\det A =$ $\boxed{3 + 2\alpha}$

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das System eine eindeutige Lösung? $\boxed{\alpha \neq -\frac{3}{2}}$

Berechnen Sie diese Lösung. $x =$ $\boxed{\begin{pmatrix} -\frac{1}{3+2\alpha} \\ \frac{2}{3+2\alpha} \\ \frac{3}{3+2\alpha} \end{pmatrix}}$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie: $\operatorname{Rg} A = \boxed{2}$ $\det B = \boxed{-40}$ $\det(AB) = \boxed{0}$

Aufgabe 8 (*3 Punkte*) Gegeben sind die folgenden Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & e \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} & 1 \\ -1 & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie, wenn möglich, die folgenden Matrizen. Tragen Sie „existiert nicht“ in den Kasten ein, falls die Operation nicht möglich ist.

$$A^{\mathsf{T}} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ e & -2 \end{pmatrix}} \qquad BB^{\mathsf{T}} = \boxed{\begin{pmatrix} 1-2\,\mathrm{i} & 2\,\mathrm{i} \\ 2\,\mathrm{i} & 1+2\,\mathrm{i} \end{pmatrix}} \qquad C^{-1} = \boxed{\text{existiert nicht}}$$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Gegeben sei die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \varphi\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die Matrixdarstellung von φ bezüglich der Standardbasis E an.

$${}_E\varphi_E = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}}$$

(b) Bestimmen Sie das Bild von $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ unter φ. $\varphi(x) = \boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ 16 \end{pmatrix}}$

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studien-gang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/3	/3	/3	/7	/5	/3	/3	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Die Ebene E ist gegeben durch die Gleichung $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1$.

(a) Geben Sie die Hessesche Normalform für E an: $\frac{1}{\sqrt{14}} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \middle| x \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{14}}$

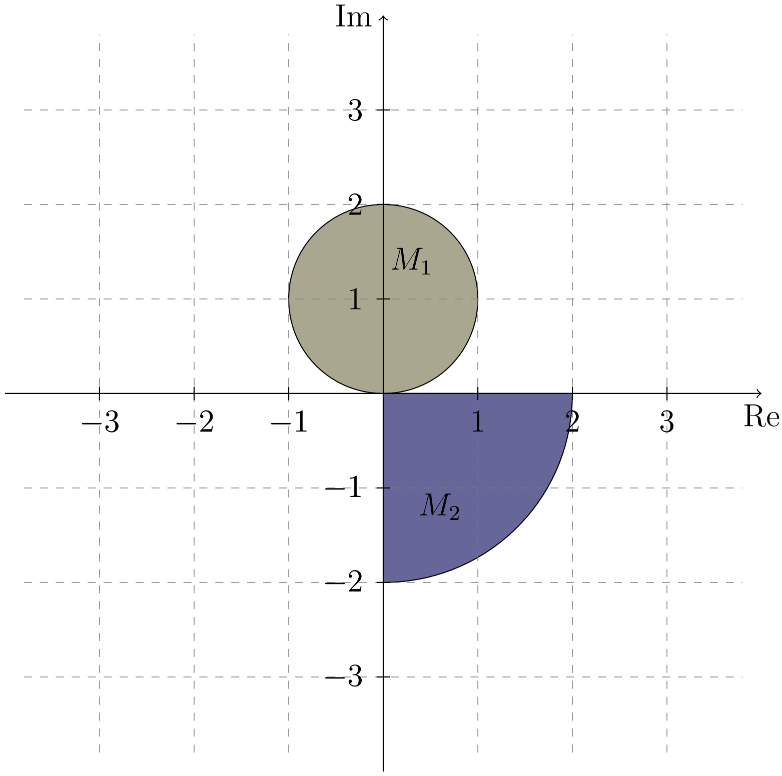
(b) Welchen Abstand hat E vom Ursprung? $\frac{1}{\sqrt{14}}$

(c) Bestimmen Sie den Abstand des Punkts $B = \begin{pmatrix} 2, & 6, & 3 \end{pmatrix}$ von E : $\frac{4}{\sqrt{14}}$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 = \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Im}\left(-\frac{2}{z}\right) \geqq 1\}, \quad M_2 = \{z \in \mathbb{C} : \ z\bar{z} \leqq 4 \ \text{ und } \ \tfrac{3\pi}{2} \leqq \arg(z) \leqq 2\pi\}$$

in der Gaußschen Zahlenebene.



Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Gegeben ist die Pyramide mit den Eckpunkten

$$A := \begin{pmatrix} 3, & 2, & -1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 4, & -1, & 3 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} -4, & 2, & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D := \begin{pmatrix} -4, & 3, & -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie einen Normalenvektor $\vec{n}$ (der Länge 1) auf der Seite CDA und berechnen Sie die Fläche F dieser Seite.

$$\vec{n} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{246}}\begin{pmatrix} 1 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix}} \qquad F = \boxed{\frac{\sqrt{246}}{2}}$$

Aufgabe 5 (*7 Punkte*)

Bestimmen Sie jeweils alle $x \in \mathbb{R}$, für die folgende Ungleichungen erfüllt sind:

(a) $\dfrac{4-x^2}{5-x} \geqq 0$

$x \in$ $\boxed{[-2,2] \cup (5,+\infty)}$

(b) $|x+2| + x \leqq \Big|x + |x+2|\Big|$

$x \in$ $\boxed{\mathbb{R}}$

(c) $\left|\dfrac{1}{x}\right| + \dfrac{4}{3x} \geqq 7$

$x \in$ $\boxed{\left(0, \frac{1}{3}\right]}$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Gegeben ist das reelle, lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \alpha & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix A. $\det A =$ $\boxed{5 - 2\alpha}$

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das System eine eindeutige Lösung? $\boxed{\alpha \neq \frac{5}{2}}$

Berechnen Sie diese Lösung. $x =$ $\boxed{\begin{pmatrix} -\frac{2}{5-2\alpha} \\ \frac{2}{5-2\alpha} \\ \frac{1}{5-2\alpha} \end{pmatrix}}$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie: $\det A = \boxed{23}$ $\quad \operatorname{Rg} B = \boxed{2}$ $\quad \det(AB) = \boxed{0}$

Aufgabe 8 (*3 Punkte*) Gegeben sind die folgenden Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \\ -1 & \ln 7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie, wenn möglich, die folgenden Matrizen. Tragen Sie „existiert nicht“ in den Kasten ein, falls die Operation nicht möglich ist.

$$A^{\mathsf{T}} = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & \ln 7 \end{pmatrix}} \qquad B^{\mathsf{T}} B = \boxed{\begin{pmatrix} 1-2\,\mathrm{i} & 2 \\ 2 & 1+2\,\mathrm{i} \end{pmatrix}} \qquad C^{-1} = \boxed{\text{existiert nicht}}$$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Gegeben sei die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \varphi\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die Matrixdarstellung von φ bezüglich der Standardbasis E an.

$${}_E\varphi_E = \boxed{\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

(b) Bestimmen Sie das Bild von $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ unter φ. $\qquad \varphi(x) = \boxed{\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}}$
