Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studiengang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/5	/3	/6	/3	/3	/3	/5	/3	/32

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Nebenstehende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*5 Punkte*)
Gegeben ist die folgende Affinität: $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Geben Sie den linearen Anteil A und den Translationsanteil t von α an:

$A =$ | $t =$

Geben Sie außerdem den linearen Anteil B und den Translationsanteil s der Umkehrabbildung α^{-1} an:

$B =$ | $s =$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Gegeben seien die folgenden Matrizen in $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

(a) Die Abbildung $v \mapsto Av$ beschreibt eine Drehung um den Ursprung. Geben Sie den Drehwinkel φ an:

$\varphi = \boxed{}$

(b) Die Abbildung $v \mapsto Bv$ beschreibt eine Spiegelung. Bestimmen Sie die Spiegelungsachse g:

$g = \boxed{}$

Aufgabe 4 (*6 Punkte*) Verwenden Sie das Schmidtsche Orthonormierungsverfahren, um eine Orthonormalbasis f_1, f_2, f_3 für den Unterraum $W = \mathrm{L}\,(b_1, b_2, b_3)$ von $\mathbb{R}^4$ zu konstruieren. Dabei sei

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie f_1 durch Normierung von b_1.

(b) Berechnen Sie einen normierten Vektor $f_2 \in \mathrm{L}\,(f_1, b_2)$ orthogonal zu f_1.

(c) Berechnen Sie einen normierten Vektor $f_3 \in \mathrm{L}\,(f_1, f_2, b_3)$ orthogonal zu $\mathrm{L}\,(f_1, f_2)$.

$f_1 = \boxed{}$ $\qquad f_2 = \boxed{}$ $\qquad f_3 = \boxed{}$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*)

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & \alpha & -1 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Entwickeln Sie $\det A$ nach der 2. Zeile

$$\det A = \boxed{-2} \cdot \det\left(\boxed{}\right) + \boxed{} \cdot \det\left(\boxed{}\right) + \boxed{} \cdot \det\left(\boxed{}\right)$$

und berechnen Sie $\det A = \boxed{}$. Für welche α ist die Matrix nicht invertierbar? $\alpha = \boxed{}$

Aufgabe 6 (*3 Punkte*)

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ hat die Eigenräume $\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ und $\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

(a) Geben Sie die Eigenwerte von A mit deren geometrischer und algebraischer Vielfachheit an:

Eigenwert	algebraische Vielfachheit	geometrische Vielfachheit

(b) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

	wahr	falsch
A ist invertierbar		
A ist orthogonal diagonalisierbar		
A ist positiv definit		

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) Gegeben sei $\mathbb{R}^2$ mit Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = (\vec{0}; e_1, e_2)$.

Darin sind die Punkte P_0, P_1 und P_2 gegeben durch:

$$_{\mathbb{E}}P_0 = (-4, 2)^{\mathsf{T}}, \qquad _{\mathbb{E}}P_1 = (0, 4)^{\mathsf{T}}, \qquad _{\mathbb{E}}P_2 = (-3, 2)^{\mathsf{T}}.$$

Geben Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F} = (Q; f_1, f_2)$ an, in dem Folgendes gilt:

$$_{\mathbb{F}}P_0 = (0, 0)^{\mathsf{T}}, \qquad _{\mathbb{F}}P_1 = (1, 0)^{\mathsf{T}}, \qquad _{\mathbb{F}}P_2 = (0, 1)^{\mathsf{T}} :$$

$$\mathbb{F} = \left(\boxed{} ; \boxed{} , \boxed{} \right)$$

Geben Sie die Koordinatentransformationen $_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und $_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ an:

$$_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = \left(\boxed{} \right) v + \left(\boxed{} \right), \qquad _{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = \left(\boxed{} \right) v + \left(\boxed{} \right).$$

Aufgabe 8 (*5 Punkte*)

Bestimmen Sie für die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ alle Eigenwerte

$\lambda_1 = \boxed{}$, $\lambda_2 = \boxed{}$, $\lambda_3 = \boxed{}$

und die dazugehörigen Eigenräume

$V(\lambda_1) = \boxed{}$, $V(\lambda_2) = \boxed{}$, $V(\lambda_3) = \boxed{}$.

Geben Sie eine Transformationsmatrix T und dazu eine Diagonalmatrix D so an, dass $D = T^{-1} A\, T$.

$T = \boxed{}$ $D = \boxed{}$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Gegeben sei im $\mathbb{R}^3$ die Quadrik Q mit der Gleichung

$$9x_1^2 + 8x_2^2 + 4x_3^2 + 12x_1x_3 - 1 = 0.$$

Geben Sie A, a und c für die Matrixform $x^\mathsf{T} Ax + 2a^\mathsf{T} x + c = 0$ dieser Gleichung an.

$A = \boxed{}$ $a^\mathsf{T} = \boxed{}$ $c = \boxed{}$

Bestimmen Sie die euklidische Normalform von Q: $\boxed{}$

Bestimmen Sie die Gestalt der Quadrik Q: $\boxed{}$

Name, Vorname: **Matrikel-Nummer:** **Studien-gang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/5	/3	/6	/3	/3	/3	/5	/3	/32

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Nebenstehende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*5 Punkte*)
Gegeben ist die folgende Affinität: $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon x \mapsto \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ -3 & -2 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Geben Sie den linearen Anteil A und den Translationsanteil t von α an:

$A =$ $t =$

Geben Sie außerdem den linearen Anteil B und den Translationsanteil s der Umkehrabbildung α^{-1} an:

$B =$ $s =$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Gegeben seien die folgenden Matrizen in $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

(a) Die Abbildung $v \mapsto Av$ beschreibt eine Drehung um den Ursprung. Geben Sie den Drehwinkel φ an:

$\varphi = \boxed{}$

(b) Die Abbildung $v \mapsto Bv$ beschreibt eine Spiegelung. Bestimmen Sie die Spiegelungsachse g:

$g = \boxed{}$

Aufgabe 4 (*6 Punkte*) Verwenden Sie das Schmidtsche Orthonormierungsverfahren, um eine Orthonormalbasis f_1, f_2, f_3 für den Unterraum $W = \mathrm{L}(b_1, b_2, b_3)$ von $\mathbb{R}^4$ zu konstruieren. Dabei sei

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie f_1 durch Normierung von b_1.

(b) Berechnen Sie einen normierten Vektor $f_2 \in \mathrm{L}(f_1, b_2)$ orthogonal zu f_1.

(c) Berechnen Sie einen normierten Vektor $f_3 \in \mathrm{L}(f_1, f_2, b_3)$ orthogonal zu $\mathrm{L}(f_1, f_2)$.

$f_1 = \boxed{}$ $\qquad f_2 = \boxed{}$ $\qquad f_3 = \boxed{}$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*)

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & \alpha & -3 \end{pmatrix}$. Entwickeln Sie $\det A$ nach der 1. Spalte

$$\det A = \boxed{-1} \cdot \det\left(\boxed{}\right) + \boxed{} \cdot \det\left(\boxed{}\right) + \boxed{} \cdot \det\left(\boxed{}\right)$$

und berechnen Sie $\det A = \boxed{}$. Für welche α ist die Matrix nicht invertierbar? $\alpha = \boxed{}$

Aufgabe 6 (*3 Punkte*)

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ hat die Eigenräume $\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ and $\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

(a) Geben Sie die Eigenwerte von A mit deren geometrischer und algebraischer Vielfachheit an:

Eigenwert	algebraische Vielfachheit	geometrische Vielfachheit

(b) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

	wahr	falsch
A ist invertierbar		
A ist orthogonal diagonalisierbar		
A ist positiv definit		

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) Gegeben sei $\mathbb{R}^2$ mit Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = (\vec{0}; e_1, e_2)$.

Darin sind die Punkte P_0, P_1 und P_2 gegeben durch:

$$_{\mathbb{E}}P_0 = (3, -1)^{\mathsf{T}}, \qquad _{\mathbb{E}}P_1 = (2, 0)^{\mathsf{T}}, \qquad _{\mathbb{E}}P_2 = (3, -3)^{\mathsf{T}}.$$

Geben Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F} = (Q; f_1, f_2)$ an, in dem Folgendes gilt:

$$_{\mathbb{F}}P_0 = (0, 0)^{\mathsf{T}}, \qquad _{\mathbb{F}}P_1 = (1, 0)^{\mathsf{T}}, \qquad _{\mathbb{F}}P_2 = (0, 1)^{\mathsf{T}} :$$

$$\mathbb{F} = \left(\boxed{} ; \boxed{} , \boxed{} \right)$$

Geben Sie die Koordinatentransformationen $_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und $_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ an:

$$_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = \left(\boxed{} \right) v + \left(\boxed{} \right), \qquad _{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = \left(\boxed{} \right) v + \left(\boxed{} \right).$$

Aufgabe 8 (*5 Punkte*)

Bestimmen Sie für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ alle Eigenwerte

$$\lambda_1 = \boxed{}, \quad \lambda_2 = \boxed{}, \quad \lambda_3 = \boxed{}$$

und die dazugehörigen Eigenräume

$$V(\lambda_1) = \boxed{}, \quad V(\lambda_2) = \boxed{}, \quad V(\lambda_3) = \boxed{}.$$

Geben Sie eine Transformationsmatrix T und dazu eine Diagonalmatrix D so an, dass $D = T^{-1} A\, T$.

$$T = \boxed{} \qquad D = \boxed{}$$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Gegeben sei im $\mathbb{R}^3$ die Quadrik Q mit der Gleichung

$$-4x_1^2 + 8x_2^2 - 9x_3^2 + 12x_1x_3 + 1 = 0.$$

Geben Sie A, a und c für die Matrixform $x^\mathsf{T} Ax + 2a^\mathsf{T} x + c = 0$ dieser Gleichung an.

$$A = \boxed{} \qquad a^\mathsf{T} = \boxed{} \qquad c = \boxed{}$$

Bestimmen Sie die euklidische Normalform von Q: $\boxed{}$

Bestimmen Sie die Gestalt der Quadrik Q: $\boxed{}$

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studien-gang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/5	/3	/6	/3	/3	/3	/5	/3	/32

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Nebenstehende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*5 Punkte*)

Gegeben ist die folgende Affinität: $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon x \mapsto \begin{pmatrix} -3 & -2 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Geben Sie den linearen Anteil A und den Translationsanteil t von α an:

$A =$ | $t =$

Geben Sie außerdem den linearen Anteil B und den Translationsanteil s der Umkehrabbildung α^{-1} an:

$B =$ | $s =$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Gegeben seien die folgenden Matrizen in $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

(a) Die Abbildung $v \mapsto Av$ beschreibt eine Drehung um den Ursprung. Geben Sie den Drehwinkel φ an:

$\varphi = \boxed{}$

(b) Die Abbildung $v \mapsto Bv$ beschreibt eine Spiegelung. Bestimmen Sie die Spiegelungsachse g:

$g = \boxed{}$

Aufgabe 4 (*6 Punkte*) Verwenden Sie das Schmidtsche Orthonormierungsverfahren, um eine Orthonormalbasis f_1, f_2, f_3 für den Unterraum $W = \mathrm{L}(b_1, b_2, b_3)$ von $\mathbb{R}^4$ zu konstruieren. Dabei sei

$$b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3.5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie f_1 durch Normierung von b_1.

(b) Berechnen Sie einen normierten Vektor $f_2 \in \mathrm{L}(f_1, b_2)$ orthogonal zu f_1.

(c) Berechnen Sie einen normierten Vektor $f_3 \in \mathrm{L}(f_1, f_2, b_3)$ orthogonal zu $\mathrm{L}(f_1, f_2)$.

$f_1 = \boxed{}$ $\qquad f_2 = \boxed{}$ $\qquad f_3 = \boxed{}$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*)

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha \\ 1 & -2 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Entwickeln Sie $\det A$ nach der 3. Zeile

$$\det A = \boxed{-4} \cdot \det\left(\boxed{}\right) + \boxed{} \cdot \det\left(\boxed{}\right) + \boxed{} \cdot \det\left(\boxed{}\right)$$

und berechnen Sie $\det A = \boxed{}$. Für welche α ist die Matrix nicht invertierbar? $\alpha = \boxed{}$

Aufgabe 6 (*3 Punkte*)

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ hat die Eigenräume $\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ and $\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

(a) Geben Sie die Eigenwerte von A mit deren geometrischer und algebraischer Vielfachheit an:

Eigenwert	algebraische Vielfachheit	geometrische Vielfachheit

(b) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

	wahr	falsch
A ist invertierbar		
A ist orthogonal diagonalisierbar		
A ist positiv definit		

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) Gegeben sei $\mathbb{R}^2$ mit Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = (\vec{0}; e_1, e_2)$.

Darin sind die Punkte P_0, P_1 und P_2 gegeben durch:

$$_{\mathbb{E}}P_0 = (-2, 1)^{\mathsf{T}}, \qquad _{\mathbb{E}}P_1 = (2, 0)^{\mathsf{T}}, \qquad _{\mathbb{E}}P_2 = (1, 1)^{\mathsf{T}}.$$

Geben Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F} = (Q; f_1, f_2)$ an, in dem Folgendes gilt:

$$_{\mathbb{F}}P_0 = (0, 0)^{\mathsf{T}}, \qquad _{\mathbb{F}}P_1 = (1, 0)^{\mathsf{T}}, \qquad _{\mathbb{F}}P_2 = (0, 1)^{\mathsf{T}}:$$

$$\mathbb{F} = \left(\boxed{} ; \boxed{} , \boxed{} \right)$$

Geben Sie die Koordinatentransformationen $_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und $_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ an:

$$_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = \left(\boxed{} \right) v + \left(\boxed{} \right), \qquad _{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = \left(\boxed{} \right) v + \left(\boxed{} \right).$$

Aufgabe 8 (*5 Punkte*)

Bestimmen Sie für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ alle Eigenwerte

$$\lambda_1 = \boxed{}, \quad \lambda_2 = \boxed{}, \quad \lambda_3 = \boxed{}$$

und die dazugehörigen Eigenräume

$$V(\lambda_1) = \boxed{}, \quad V(\lambda_2) = \boxed{}, \quad V(\lambda_3) = \boxed{}.$$

Geben Sie eine Transformationsmatrix T und dazu eine Diagonalmatrix D so an, dass $D = T^{-1}AT$.

$$T = \boxed{} \qquad D = \boxed{}$$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Gegeben sei im $\mathbb{R}^3$ die Quadrik Q mit der Gleichung

$$4x_1^2 + 5x_2^2 + 16x_3^2 + 16x_1x_3 - 1 = 0.$$

Geben Sie A, a und c für die Matrixform $x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0$ dieser Gleichung an.

$$A = \boxed{} \qquad a^\intercal = \boxed{} \qquad c = \boxed{}$$

Bestimmen Sie die euklidische Normalform von Q: $\boxed{}$

Bestimmen Sie die Gestalt der Quadrik Q: $\boxed{}$

Name, Vorname:

Matrikel-Nummer:

Studiengang:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/5	/3	/6	/3	/3	/3	/5	/3	/32

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Nebenstehende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:

Gruppennr.:

Aufgabe 2 (*5 Punkte*)

Gegeben ist die folgende Affinität: $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto \begin{pmatrix} -3 & -2 & -5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Geben Sie den linearen Anteil A und den Translationsanteil t von α an:

$A =$

$t =$

Geben Sie außerdem den linearen Anteil B und den Translationsanteil s der Umkehrabbildung α^{-1} an:

$B =$

$s =$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Gegeben seien die folgenden Matrizen in $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

(a) Die Abbildung $v \mapsto Av$ beschreibt eine Drehung um den Ursprung. Geben Sie den Drehwinkel φ an:

$\varphi = \boxed{}$

(b) Die Abbildung $v \mapsto Bv$ beschreibt eine Spiegelung. Bestimmen Sie die Spiegelungsachse g:

$g = \boxed{}$

Aufgabe 4 (*6 Punkte*) Verwenden Sie das Schmidtsche Orthonormierungsverfahren, um eine Orthonormalbasis f_1, f_2, f_3 für den Unterraum $W = \mathrm{L}(b_1, b_2, b_3)$ von $\mathbb{R}^4$ zu konstruieren. Dabei sei

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie f_1 durch Normierung von b_1.

(b) Berechnen Sie einen normierten Vektor $f_2 \in \mathrm{L}(f_1, b_2)$ orthogonal zu f_1.

(c) Berechnen Sie einen normierten Vektor $f_3 \in \mathrm{L}(f_1, f_2, b_3)$ orthogonal zu $\mathrm{L}(f_1, f_2)$.

$f_1 = \boxed{}$ $f_2 = \boxed{}$ $f_3 = \boxed{}$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*)

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 4 \\ \alpha & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Entwickeln Sie $\det A$ nach der 3. Spalte

$$\det A = \boxed{-3} \cdot \det \left(\boxed{} \right) + \boxed{} \cdot \det \left(\boxed{} \right) + \boxed{} \cdot \det \left(\boxed{} \right)$$

und berechnen Sie $\det A = \boxed{}$. Für welche α ist die Matrix nicht invertierbar? $\alpha = \boxed{}$

Aufgabe 6 (*3 Punkte*)

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ hat die Eigenräume $\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ and $\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

(a) Geben Sie die Eigenwerte von A mit deren geometrischer und algebraischer Vielfachheit an:

Eigenwert	algebraische Vielfachheit	geometrische Vielfachheit

(b) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

	wahr	falsch
A ist invertierbar		
A ist orthogonal diagonalisierbar		
A ist positiv definit		

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) Gegeben sei $\mathbb{R}^2$ mit Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = (\vec{0}; e_1, e_2)$.

Darin sind die Punkte P_0, P_1 und P_2 gegeben durch:

$$_{\mathbb{E}}P_0 = (2,1)^\intercal, \qquad _{\mathbb{E}}P_1 = (0,-2)^\intercal, \qquad _{\mathbb{E}}P_2 = (2,3)^\intercal.$$

Geben Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F} = (Q; f_1, f_2)$ an, in dem Folgendes gilt:

$$_{\mathbb{F}}P_0 = (0,0)^\intercal, \qquad _{\mathbb{F}}P_1 = (1,0)^\intercal, \qquad _{\mathbb{F}}P_2 = (0,1)^\intercal :$$

$$\mathbb{F} = \left(\boxed{} ; \boxed{} , \boxed{} \right)$$

Geben Sie die Koordinatentransformationen $_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und $_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ an:

$$_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = \left(\boxed{} \right) v + \left(\boxed{} \right), \qquad _{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = \left(\boxed{} \right) v + \left(\boxed{} \right).$$

Aufgabe 8 (*5 Punkte*)

Bestimmen Sie für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ alle Eigenwerte

$\lambda_1 = \boxed{}$, $\lambda_2 = \boxed{}$, $\lambda_3 = \boxed{}$

und die dazugehörigen Eigenräume

$V(\lambda_1) = \boxed{}$, $V(\lambda_2) = \boxed{}$, $V(\lambda_3) = \boxed{}$.

Geben Sie eine Transformationsmatrix T und dazu eine Diagonalmatrix D so an, dass $D = T^{-1} A\, T$.

$T = \boxed{}$ $D = \boxed{}$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Gegeben sei im $\mathbb{R}^3$ die Quadrik Q mit der Gleichung

$$-16x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 16x_1x_3 + 1 = 0.$$

Geben Sie A, a und c für die Matrixform $x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0$ dieser Gleichung an.

$A = \boxed{}$ $a^\intercal = \boxed{}$ $c = \boxed{}$

Bestimmen Sie die euklidische Normalform von Q: $\boxed{}$

Bestimmen Sie die Gestalt der Quadrik Q: $\boxed{}$
