Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studiengang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/3	/4	/5	/8	/4	/2	/4	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: ☐ **Gruppennr.:** ☐

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Gegeben ist die affine Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto Ax + t$, wobei

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad t = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

A ist orthogonal.	wahr ○	falsch ○
Es gilt $\lvert\alpha(t) - t\rvert = \lvert t\rvert$.	wahr ○	falsch ○

Berechnen Sie außerdem die Determinante von A:

$\det A =$ ☐

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Gegeben ist die folgende Affinität:

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Umkehrabbildung an:

$$\varphi^{-1}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto \boxed{}\, x + \boxed{}\,.$$

Aufgabe 4 (*5 Punkte*) Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

alle Eigenwerte

$$\lambda_1 = \boxed{}, \quad \lambda_2 = \boxed{}, \quad \lambda_3 = \boxed{}$$

und die dazugehörigen Eigenräume

$$V(\lambda_1) = \boxed{}, \quad V(\lambda_2) = \boxed{}, \quad V(\lambda_3) = \boxed{}.$$

Geben Sie eine Transformationsmatrix T und die dazugehörige Diagonalmatrix D so an, dass $D = T^{-1} A\, T$ gilt.

$$T = \boxed{} \qquad D = \boxed{}$$

Aufgabe 5 (*8 Punkte*)

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ hat die Eigenräume $\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ und $\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$,

die Matrix $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ hat die Eigenräume $\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ und $\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

(a) Geben Sie die Eigenwerte von A und B und deren geometrische und algebraische Vielfachheiten an:

Eigenwerte von A	algebraische Vielfachheit	geometrische Vielfachheit
Eigenwerte von B	algebraische Vielfachheit	geometrische Vielfachheit

(b) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

	wahr	falsch
B ist invertierbar, aber A nicht.		
A ist orthogonal diagonalisierbar.		
B ist orthogonal diagonalisierbar.		
B ist indefinit.		

(c) Geben Sie eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ an, die aus Eigenvektoren von B besteht:

Aufgabe 6 (*4 Punkte*) Im $\mathbb{R}^2$ sind zwei Koordinatensysteme $\mathbb{F}$ und $\mathbb{G}$ mit

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \qquad \mathbb{G} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

gegeben. Berechnen Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}$ und ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}$:

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}(v) = \left(\boxed{} \right) v + \left(\boxed{} \right), \qquad {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = \left(\boxed{} \right) v + \left(\boxed{} \right).$$

Aufgabe 7 (*2 Punkte*) Gegeben ist die Quadrik

$$Q = \left\{ (x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 3x_1^2 + 2\sqrt{5}x_1x_2 - x_2^2 + 1 = 0 \right\}.$$

Geben Sie die symmetrische Matrix A an, die den quadratischen Anteil beschreibt. Bringen Sie A auf Diagonalgestalt D:

$$A = \boxed{}, \qquad D = \boxed{}.$$

Geben Sie die affine Klassifikation von Q an: $\boxed{}$

Aufgabe 8 (*4 Punkte*) Berechnen Sie für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Limes superior, den Limes inferior und gegebenenfalls den Grenzwert. Tragen Sie "existiert nicht" ein, falls $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ nicht existiert.

	$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$	$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$
$a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$			
$a_n = \left(\dfrac{4 + (-1)^n}{3} \right)^n$			
$a_n = \sqrt{n-1} - \sqrt{n+2}$			
$a_n = 1 - \left(\dfrac{5}{6} \right)^n$			
