

Name,
Vorname:

Matrikel-
Nummer:

Studien-
gang:

| | | | | | | | | | | |
|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-------|
| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Summe |
| Punkte | /1 | /2 | /3 | /3 | /5 | /3 | /6 | /6 | /3 | /32 |

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen könnten hilfreich sein:

| | | | | | | |
|---------------------|--------------|---------------|-----------|-------------------------|-----------|----------------------------|
| $f(x)$ | x^a | e^x | $\sin x$ | $\tan(x)$ | $\sinh x$ | $\operatorname{arsinh} x$ |
| $\frac{d}{dx} f(x)$ | $a x^{a-1}$ | e^x | $\cos x$ | $\frac{1}{(\cos(x))^2}$ | $\cosh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ |
| $f(x)$ | b^x | $\ln x $ | $\cos x$ | $\arctan(x)$ | $\cosh x$ | $\operatorname{arcosh} x$ |
| $\frac{d}{dx} f(x)$ | $\ln(b) b^x$ | $\frac{1}{x}$ | $-\sin x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ | $\sinh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ |

$a, b \in \mathbb{R}, b > 0$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:

Gruppennr.:

Aufgabe 2 (2 Punkte) Bestimmen Sie die Werte der folgenden Reihen.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{k!} = \boxed{}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{4}{\pi}\right)^{1-k} = \boxed{}$$

Aufgabe 3 (3 Punkte) Stellen Sie die Funktion

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}: x \mapsto \frac{1}{2+x^2}$$

als Potenzreihe um 0 dar.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen von $f(x) = x \sin(x)$.

$$f'(x) = \boxed{}, \quad f''(x) = \boxed{}$$

Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos(x))^2}{x \sin(x)} = \boxed{}.$$

Aufgabe 5 (5 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$$\int \frac{3x+7}{(x+1)(x+3)} dx = \boxed{}$$

$$\int e^{-3x+9} dx = \boxed{}$$

$$\int_3^{+\infty} e^{-3x+9} dx = \boxed{}$$

Aufgabe 6 (3 Punkte) Bestimmen Sie alle ersten partiellen Ableitungen der Funktion

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: (x, y, z) \mapsto \sqrt{x^2+1} y^{\sin(z)}.$$

$$f_x(x, y, z) = \boxed{} \quad f_y(x, y, z) = \boxed{}$$

$$f_z(x, y, z) = \boxed{}$$

Aufgabe 7 (6 Punkte) Berechnen Sie für die Funktion

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y, z) \mapsto xy + \sin(y + z)$$

den Gradienten und die Hesse-Matrix.

$$\text{grad } f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \\ \boxed{} \end{pmatrix}$$

$$\text{H}f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix}$$

Geben Sie das Taylor-Polynom der Stufe zwei zum Entwicklungspunkt $(1, \pi, 0)$ an.

$$T_2(f, (x, y, z), (1, \pi, 0)) =$$

Aufgabe 8 (6 Punkte) Berechnen Sie die Rotation des Vektorfeldes

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} 2x(y+3)(z-1) \\ (x^2+2)(z-1) \\ (x^2+2)(y-1+\alpha^2) \end{pmatrix}$$

mit dem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

rot $f =$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt f ein Potential?

Bestimmen Sie für diese α ein Potential U .

$U(x, y, z) =$

Aufgabe 9 (3 Punkte) Gegeben ist

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} 2x(y+3)(z-1) \\ (x^2+2)(z-1) \\ (x^2+2)y \end{pmatrix}$$

und eine Parametrisierung der Kurve K

$$C: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3: t \mapsto (t, 0, t)^T.$$

Berechnen Sie

$f(C(t)) =$

$C'(t) =$

sowie das Kurvenintegral

$$\int_K f(s) \cdot ds =$$