Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/3	/4	/3	/5	/8	/4	/2	/2	/32

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Gegeben sind die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ein Orthonormalsystem f_1, f_2, f_3 mit $f_1 \in \mathrm{L}(b_1)$, $f_2 \in \mathrm{L}(b_1, b_2)$, $f_3 \in \mathrm{L}(b_1, b_2, b_3)$.

$$f_1 = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad f_2 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{29}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}} \qquad f_3 = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Geben Sie die eigentliche Isometrie α an, die

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ auf } \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ auf } \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

abbildet.

$$\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}\, v + \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Gegeben ist das Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Bestimmen Sie die Koordinatentransformation von Standard- auf $\mathbb{F}$-Koordinaten und umgekehrt.

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}\, v + \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}, \quad {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} \colon v \mapsto \boxed{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}}\, v + \boxed{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 5 (*5 Punkte*) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 13 & -4 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{C}$.

Eigenwerte: $\lambda_1 = \boxed{6\mathrm{i}}$, $\lambda_2 = \boxed{-6\mathrm{i}}$

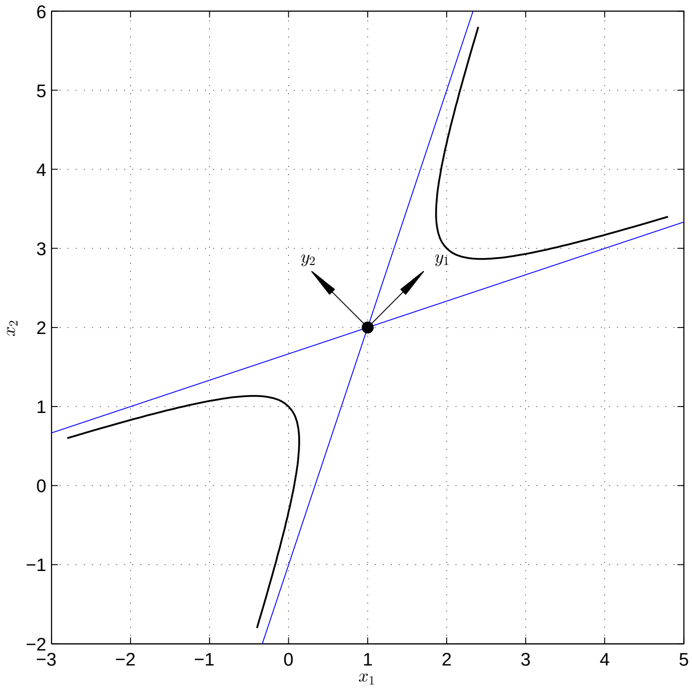
Eigenräume: $V(\lambda_1) = \boxed{\left\{ t \begin{pmatrix} 4+6\mathrm{i} \\ 13 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{C} \right\}}$, $V(\lambda_2) = \boxed{\left\{ t \begin{pmatrix} 4-6\mathrm{i} \\ 13 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{C} \right\}}$

Aufgabe 6 (*8 Punkte*)

In der Abbildung ist die Quadrik

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -3x_1^2 + 10x_1x_2 - 3x_2^2 - 14x_1 + 2x_2 + 1 = 0\}$$

mit den zugehörigen Asymptoten dargestellt:



Kreuzen Sie den Typ der Quadrik an:

☐ Kegelige Quadrik , ☒ Mittelpunktsquadrik , ☐ Parabolische Quadrik

Geben Sie eine affine Normalform der Quadrik an.

$$z_1^2 - z_2^2 + 1 = 0$$

Geben Sie eine euklidische Normalform der Quadrik an.

$$-y_1^2/2 + 2y_2^2 + 1 = 0$$

Geben Sie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, in dem die Quadrik diese euklidische Normalform besitzt und zeichnen Sie dieses Koordinatensystem in die Abbildung ein.

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*)

Gegeben ist die Quadrik

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 6x_2 + 4x_3 = 0\} \ .$$

Bestimmen Sie F und t für die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon v \mapsto Fv + t$ in ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$, in dem die Quadrik euklidische Normalform besitzt.

$$F = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \ , \qquad t = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

Geben Sie die Gestalt der Quadrik an: zweischaliges Hyperboloid

---

Aufgabe 8 (*2 Punkte*)

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A zum Eigenvektor v. Geben Sie einen Eigenwert der folgenden Matrix zum Eigenvektor v an.

(a) A^8 Eigenwert: λ^8

Sei $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zu A konjugiert, d.h. es gibt eine reguläre Matrix T mit $B = T^{-1}AT$. Geben Sie einen Eigenwert der folgenden Matrix zum Eigenvektor $T^{-1}v$ an.

(b) $5B$ Eigenwert: 5λ

Aufgabe 9 (*2 Punkte*)

Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie und Beschränktheit. Tragen Sie entweder **Ja** oder **Nein** in die Kästen ein.

	Monoton	Beschränkt
$a_n = 3 + 2^{-2n}$	Ja	Ja
$b_n = (-1)^n \frac{2}{n}$	Nein	Ja
$c_n = -(3n+4)$	Ja	Nein
$d_n = \frac{7}{3}\cos\left(\frac{3\pi n}{2}\right)$	Nein	Ja

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studiengang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/3	/4	/3	/5	/8	/4	/2	/2	/32

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Gegeben sind die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ein Orthonormalsystem f_1, f_2, f_3 mit $f_1 \in \mathrm{L}(b_1)$, $f_2 \in \mathrm{L}(b_1, b_2)$, $f_3 \in \mathrm{L}(b_1, b_2, b_3)$.

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f_2 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad f_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Geben Sie die eigentliche Isometrie α an, die

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ auf } \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ auf } \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

abbildet.

$$\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} \, v + \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Gegeben ist das Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) .$$

Bestimmen Sie die Koordinatentransformation von Standard- auf $\mathbb{F}$-Koordinaten und umgekehrt.

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}} \, v + \boxed{\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}} \, , \quad {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} \colon v \mapsto \boxed{\tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}} \, v + \boxed{\tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -6 \\ -7 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 5 (*5 Punkte*) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 13 & -4 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{C}$.

Eigenwerte: $\lambda_1 = \boxed{7\mathrm{i}}$, $\lambda_2 = \boxed{-7\mathrm{i}}$

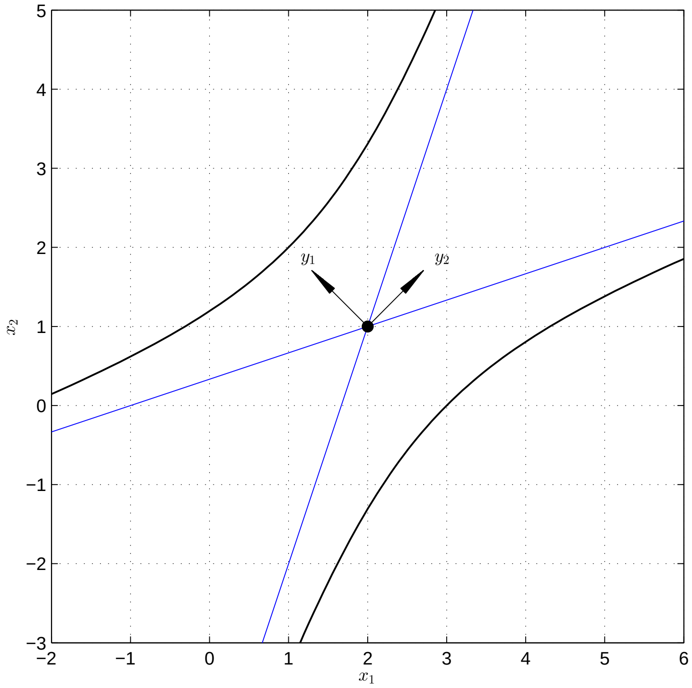
Eigenräume: $V(\lambda_1) = \boxed{\left\{ t \begin{pmatrix} 4+7\mathrm{i} \\ 13 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{C} \right\}}$, $V(\lambda_2) = \boxed{\left\{ t \begin{pmatrix} 4-7\mathrm{i} \\ 13 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{C} \right\}}$

Aufgabe 6 (*8 Punkte*)

In der Abbildung ist die Quadrik

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2 - 2x_1 + 14x_2 - 21 = 0\}$$

mit den zugehörigen Asymptoten dargestellt:



Kreuzen Sie den Typ der Quadrik an:

☐ Kegelige Quadrik , ☒ Mittelpunktsquadrik , ☐ Parabolische Quadrik

Geben Sie eine affine Normalform der Quadrik an.

$$z_1^2 - z_2^2 + 1 = 0$$

Geben Sie eine euklidische Normalform der Quadrik an.

$$-y_1^2/2 + y_2^2/8 + 1 = 0$$

Geben Sie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, in dem die Quadrik diese euklidische Normalform besitzt und zeichnen Sie dieses Koordinatensystem in die Abbildung ein.

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} , \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*)

Gegeben ist die Quadrik

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid -2x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_3^2 - 6x_2 - 8x_3 = 0\} .$$

Bestimmen Sie F und t für die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon v \mapsto Fv + t$ in ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$, in dem die Quadrik euklidische Normalform besitzt.

$$F = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}, \qquad t = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Geben Sie die Gestalt der Quadrik an: einschaliges Hyperboloid

Aufgabe 8 (*2 Punkte*)

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A zum Eigenvektor v. Geben Sie einen Eigenwert der folgenden Matrix zum Eigenvektor v an.

(a) A^7 Eigenwert: λ^7

Sei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zu A konjugiert, d.h. es gibt eine reguläre Matrix T mit $B = T^{-1}AT$. Geben Sie einen Eigenwert der folgenden Matrix zum Eigenvektor $T^{-1}v$ an.

(b) $6B$ Eigenwert: 6λ

Aufgabe 9 (*2 Punkte*)

Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie und Beschränktheit. Tragen Sie entweder **Ja** oder **Nein** in die Kästen ein.

	Monoton	Beschränkt
$a_n = -(4n+2)$	Ja	Nein
$b_n = 2 - 2^{-3n}$	Ja	Ja
$c_n = (-1)^n \frac{4}{n}$	Nein	Ja
$d_n = \frac{7}{5} \sin\left(\frac{5\pi n}{2}\right)$	Nein	Ja

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/3	/4	/3	/5	/8	/4	/2	/2	/32

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Gegeben sind die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ein Orthonormalsystem f_1, f_2, f_3 mit $f_1 \in \mathrm{L}(b_1)$, $f_2 \in \mathrm{L}(b_1, b_2)$, $f_3 \in \mathrm{L}(b_1, b_2, b_3)$.

$$f_1 = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad f_2 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{29}} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad f_3 = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Geben Sie die eigentliche Isometrie α an, die

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ auf } \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ auf } \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

abbildet.

$$\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} v + \boxed{\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Gegeben ist das Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \right).$$

Bestimmen Sie die Koordinatentransformation von Standard- auf $\mathbb{F}$-Koordinaten und umgekehrt.

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}} v + \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}, \quad {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} \colon v \mapsto \boxed{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}} v + \boxed{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 5 (*5 Punkte*) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 17 & -2 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{C}$.

Eigenwerte: $\lambda_1 = \boxed{8\mathrm{i}}$, $\lambda_2 = \boxed{-8\mathrm{i}}$

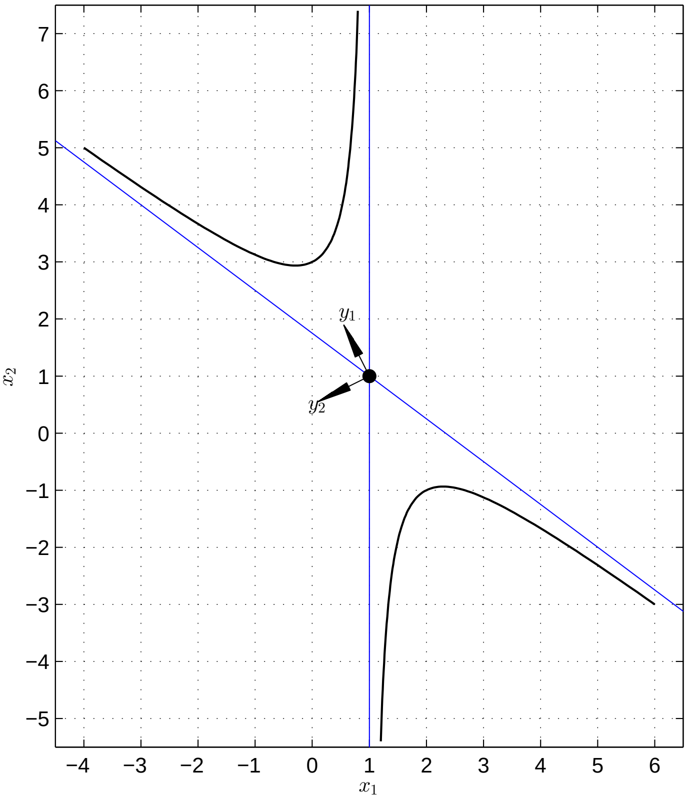
Eigenräume: $V(\lambda_1) = \boxed{\left\{ t \begin{pmatrix} 2+8\mathrm{i} \\ 17 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{C} \right\}}$, $V(\lambda_2) = \boxed{\left\{ t \begin{pmatrix} 2-8\mathrm{i} \\ 17 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{C} \right\}}$

Aufgabe 6 (*8 Punkte*)

In der Abbildung ist die Quadrik

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -3x_1^2 - 4x_1x_2 - 0x_2^2 + 10x_1 + 4x_2 - 12 = 0\}$$

mit den zugehörigen Asymptoten dargestellt:



Kreuzen Sie den Typ der Quadrik an:

☐ Kegelige Quadrik , ☒ Mittelpunktsquadrik , ☐ Parabolische Quadrik

Geben Sie eine affine Normalform der Quadrik an.

$$z_1^2 - z_2^2 + 1 = 0$$

Geben Sie eine euklidische Normalform der Quadrik an.

$$-y_1^2/5 + 4y_2^2/5 + 1 = 0$$

Geben Sie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, in dem die Quadrik diese euklidische Normalform besitzt und zeichnen Sie dieses Koordinatensystem in die Abbildung ein.

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} , \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*)

Gegeben ist die Quadrik

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid\ 2x_1^2 + 3x_2^2 - 12x_2 + 2x_3 = 0\}\ .$$

Bestimmen Sie F und t für die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon v \mapsto Fv + t$ in ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$, in dem die Quadrik euklidische Normalform besitzt.

$$F = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}\ , \qquad t = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}}$$

Geben Sie die Gestalt der Quadrik an: elliptisches Paraboloid

---

Aufgabe 8 (*2 Punkte*)

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A zum Eigenvektor v. Geben Sie einen Eigenwert der folgenden Matrix zum Eigenvektor v an.

(a) A^6 Eigenwert: λ^6

Sei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zu A konjugiert, d.h. es gibt eine reguläre Matrix T mit $B = T^{-1}AT$. Geben Sie einen Eigenwert der folgenden Matrix zum Eigenvektor $T^{-1}v$ an.

(b) $7B$ Eigenwert: 7λ

Aufgabe 9 (*2 Punkte*)

Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie und Beschränktheit. Tragen Sie entweder **Ja** oder **Nein** in die Kästen ein.

	Monoton	Beschränkt
$a_n = -(2n+3)$	Ja	Nein
$b_n = (-1)^n \frac{3}{n}$	Nein	Ja
$c_n = 4 - 2^{-5n}$	Ja	Ja
$d_n = \frac{7}{5}\cos\left(\frac{5\pi n}{2}\right)$	Nein	Ja

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studien-gang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/3	/4	/3	/5	/8	/4	/2	/2	/32

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Gegeben sind die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ein Orthonormalsystem f_1, f_2, f_3 mit $f_1 \in \mathrm{L}(b_1)$, $f_2 \in \mathrm{L}(b_1, b_2)$, $f_3 \in \mathrm{L}(b_1, b_2, b_3)$.

$$f_1 = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad f_2 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad f_3 = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Geben Sie die eigentliche Isometrie α an, die

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ auf } \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ auf } \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

abbildet.

$$\alpha \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} \; v + \boxed{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Gegeben ist das Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right).$$

Bestimmen Sie die Koordinatentransformation von Standard- auf $\mathbb{F}$-Koordinaten und umgekehrt.

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}} \; v + \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}} \;, \quad {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} \colon v \mapsto \boxed{\tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \; v + \boxed{\tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 5 (*5 Punkte*) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 17 & -2 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{C}$.

Eigenwerte: $\lambda_1 = \boxed{9\mathrm{i}}$, $\lambda_2 = \boxed{-9\mathrm{i}}$

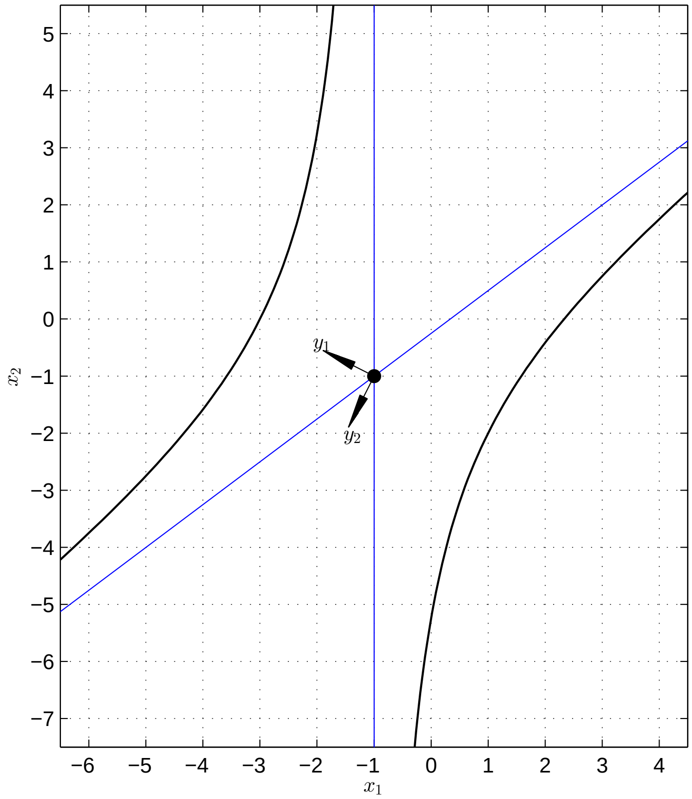
Eigenräume: $V(\lambda_1) = \boxed{\left\{ t \begin{pmatrix} 2+9\mathrm{i} \\ 17 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{C} \right\}}$, $V(\lambda_2) = \boxed{\left\{ t \begin{pmatrix} 2-9\mathrm{i} \\ 17 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{C} \right\}}$

Aufgabe 6 (*8 Punkte*)

In der Abbildung ist die Quadrik

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 0x_2^2 + 2x_1 - 4x_2 - 21 = 0\}$$

mit den zugehörigen Asymptoten dargestellt:



Kreuzen Sie den Typ der Quadrik an:

☐ Kegelige Quadrik , ☒ Mittelpunktsquadrik , ☐ Parabolische Quadrik

Geben Sie eine affine Normalform der Quadrik an.

$$z_1^2 - z_2^2 + 1 = 0$$

Geben Sie eine euklidische Normalform der Quadrik an.

$$-y_1^2/5 + y_2^2/20 + 1 = 0$$

Geben Sie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, in dem die Quadrik diese euklidische Normalform besitzt und zeichnen Sie dieses Koordinatensystem in die Abbildung ein.

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*)

Gegeben ist die Quadrik

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \ 2x_1^2 - 3x_2^2 - 12x_2 + 2x_3 - 4 = 0\} \ .$$

Bestimmen Sie F und t für die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon v \mapsto Fv + t$ in ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$, in dem die Quadrik euklidische Normalform besitzt.

$$F = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \ , \qquad t = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}}$$

Geben Sie die Gestalt der Quadrik an: hyperbolisches Paraboloid

---

Aufgabe 8 (*2 Punkte*)

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A zum Eigenvektor v. Geben Sie einen Eigenwert der folgenden Matrix zum Eigenvektor v an.

(a) A^5 Eigenwert: λ^5

Sei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zu A konjugiert, d.h. es gibt eine reguläre Matrix T mit $B = T^{-1}AT$. Geben Sie einen Eigenwert der folgenden Matrix zum Eigenvektor $T^{-1}v$ an.

(b) $8B$ Eigenwert: 8λ

Aufgabe 9 (*2 Punkte*)

Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie und Beschränktheit. Tragen Sie entweder **Ja** oder **Nein** in die Kästen ein.

	Monoton	Beschränkt
$a_n = (-1)^n \frac{5}{n}$	Nein	Ja
$b_n = -(7n+1)$	Ja	Nein
$c_n = 1 + 2^{-4n}$	Ja	Ja
$d_n = \frac{7}{3}\sin\left(\frac{3\pi n}{2}\right)$	Nein	Ja