**Name, Vorname:** ☐ **Matrikel-Nummer:** ☐ **Studien-gang:** ☐

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | Summe |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | /1 | /3 | /6 | /5 | /8 | /2 | /4 | /3 | /32 |

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin(x)$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |
| $\cos(x)$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |

*Viel Erfolg!*

**Aufgabe 1** (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

**Name des Tutors/der Tutorin:** ☐ **Gruppennr.:** ☐

**Aufgabe 2** (*3 Punkte*) Gegeben ist das Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Bestimmen Sie die Koordinatentransformation von Standard- auf $\mathbb{F}$-Koordinaten und umgekehrt.

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}} v + \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}, \quad {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} \colon v \mapsto \boxed{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} v + \boxed{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -13 \\ -7 \end{pmatrix}}$$

**Aufgabe 3** (*6 Punkte*) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Spur und den einzigen Eigenwert $\lambda$ von $A$:

$$\mathrm{Sp}(A) = \boxed{6}, \qquad \lambda = \boxed{2}$$

Bestimmen Sie den Eigenraum $V(\lambda)$ und die geometrische Vielfachheit $d_\lambda$ des Eigenwerts $\lambda$.

$$V(\lambda) = \boxed{L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}, \qquad d_\lambda = \boxed{2}$$

Ist die Matrix $A$ diagonalisierbar? ☐ Ja, ☒ Nein

---

**Aufgabe 4** (*5 Punkte*) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der Matrix

$$\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 13 & -7 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{C}$.

Eigenwerte: $\lambda_1 = \boxed{4\mathrm{i}}$, $\lambda_2 = \boxed{-4\mathrm{i}}$

Eigenräume: $V(\lambda_1) = \boxed{\left\{ t \begin{pmatrix} 7+4\mathrm{i} \\ 13 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{C} \right\}}$, $V(\lambda_2) = \boxed{\left\{ t \begin{pmatrix} 7-4\mathrm{i} \\ 13 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{C} \right\}}$

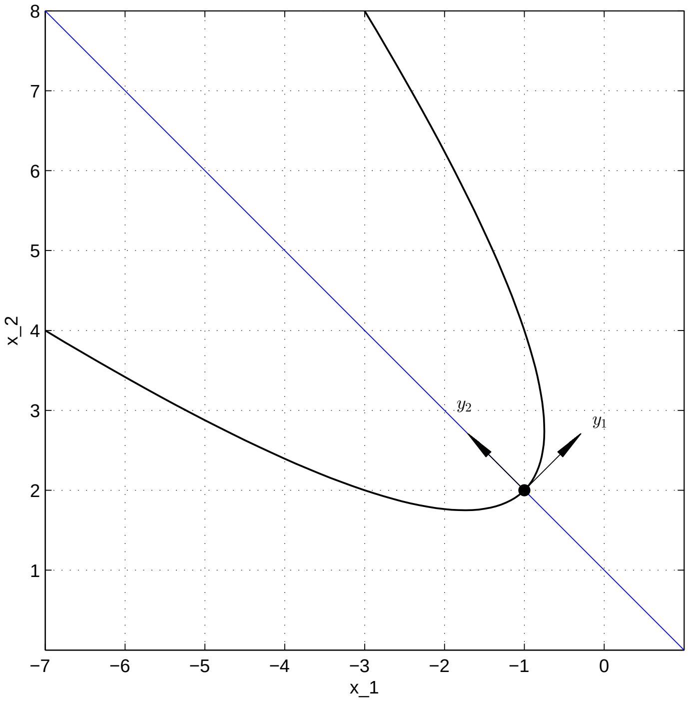
---

**Aufgabe 5** (*8 Punkte*)

In der Abbildung ist die Quadrik

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2 + 4x_2 - 7 = 0\}$$

mit der zugehörigen Symmetrie-Achse dargestellt:




Kreuzen Sie den Typ der Quadrik an:

☐ Kegelige Quadrik , ☐ Mittelpunktsquadrik , ☒ Parabolische Quadrik

Geben Sie eine affine Normalform der Quadrik an.

$$-z_1^2 + 2z_2 = 0$$

Geben Sie eine euklidische Normalform der Quadrik an.

$$-\sqrt{2}y_1^2 + 2y_2 = 0$$

Geben Sie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, in dem die Quadrik diese euklidische Normalform besitzt und zeichnen Sie dieses Koordinatensystem in die Abbildung ein.

$$\mathbb{F} = \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

**Aufgabe 6** (*2 Punkte*)

Gegeben sei eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von $A$ zum Eigenvektor $v$. Geben Sie einen Eigenwert der folgenden Matrizen zum Eigenvektor $v$ an.

**(a)** $A^6 - A^4 + A^2 + E_n$ Eigenwert: $\boxed{\lambda^6 - \lambda^4 + \lambda^2 + 1}$

**(b)** $2A^{\mathsf{T}}A + 3AA^{\mathsf{T}}$ Eigenwert: $\boxed{5\lambda^2}$

---

**Aufgabe 7** (*4 Punkte*)

Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie, Beschränktheit, und Konvergenz. Tragen Sie für die Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz entweder **Ja** oder **Nein** in die Kästen ein und bestimmen Sie den $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}$ der Folgen.

| | Monoton | Beschränkt | Konvergent | $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}$ |
|---|---|---|---|---|
| $a_n = -5 + 3^{-2n}$ | Ja | Ja | Ja | $-5$ |
| $b_n = \frac{5}{n}$ | Ja | Ja | Ja | $0$ |
| $c_n = (-1)^n(2n+8)$ | Nein | Nein | Nein | $\infty$ |
| $d_n = \frac{4}{5}\cos\left(\frac{3\pi n}{2}\right)$ | Nein | Ja | Nein | $\frac{4}{5}$ |

---

**Aufgabe 8** (*3 Punkte*)

Gegeben sind die folgenden Reihen. Berechnen Sie deren Summe.

**(a)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n}$ $\boxed{\frac{3}{4}}$

**(b)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum\limits_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ $\boxed{\frac{1}{4}}$

**(c)** $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ $\boxed{\frac{1}{4}}$

---