Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte	/1	/4	/4	/6	/8	/6	/3	/32

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*)

Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*4 Punkte*)

Bestimmen Sie jeweils alle Lösungen der folgenden Gleichungssysteme über $\mathbb{R}$:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie die komplexe Lösungsmenge $\mathcal{L}$ der folgenden Gleichung:

$$\frac{|z+1+\mathrm{i}|}{|z+1-4\mathrm{i}|} = 1. \qquad \mathcal{L} = \boxed{\left\{ a + \tfrac{3}{2}\mathrm{i} \,\middle|\, a \in \mathbb{R} \right\}}$$

(b) Stellen Sie den Vektor $v = (3-\mathrm{i}, 3\mathrm{i}, 2+\mathrm{i})^\intercal \in \mathbb{C}^3$ als Linearkombination der Vektoren $v_1 = (1+\mathrm{i}, 0, \mathrm{i})^\intercal$ und $v_2 = (0, \mathrm{i}, 0)^\intercal$ in der Form $v = \alpha v_1 + \beta v_2$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ dar.

$$v = \boxed{(-2\mathrm{i}+1)} \cdot v_1 + \boxed{3} \cdot v_2$$

Aufgabe 4 (*6 Punkte*) Gegeben seien die Punkte $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$ sowie der Vektor $v_\alpha \in \mathbb{R}^3$ wie folgt:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene an, in der A, B und C liegen:

$$\boxed{x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.}$$

(b) Geben Sie die Hessesche Normalform der Ebene aus **(a)** an:

$$\boxed{\tfrac{1}{\sqrt{5}} (x_1 + 2x_3) = \tfrac{1}{\sqrt{5}}.}$$

(c) Liegen die vier Punkte A, B, C und D in einer Ebene? Bitte kreuzen Sie das Zutreffende an.

ja ☐ nein ☒

(d) Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass v_α senkrecht auf der Ebene aus **(a)** steht.

$$\alpha = \boxed{3}$$

Aufgabe 5 (*8 Punkte*)

Die reelle Matrix A_α ist für $\alpha \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2\alpha & 2\alpha \\ \alpha & 1 & 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Gibt es $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass A_α symmetrisch ist? Bitte kreuzen Sie das Zutreffende an.

ja ☐ nein ☒

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_{A_\alpha}(\lambda)$ in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\chi_{A_\alpha}(\lambda) = \left(\boxed{3} - \lambda\right) \cdot \left(\boxed{2\alpha+\sqrt{2\alpha}} - \lambda\right) \cdot \left(\boxed{2\alpha-\sqrt{2\alpha}} - \lambda\right)$$

Geben Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ an, für die A_α nur reelle Eigenwerte besitzt.

$$\boxed{\alpha \geqq 0}$$

Geben Sie drei linear unabhängige Eigenvektoren der Matrix A_α für $\alpha = 2$ an.

$$v_1 = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad v_2 = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad v_3 = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 6 (*6 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform der folgenden Quadrik:
$Q_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 5 = 0\}$

$$\boxed{-\frac{4}{5}y_1^2 - \frac{2}{5}y_2^2 + 1 = 0}$$

Bestimmen Sie die Gestalt der Quadrik anhand der Normalform.

Ellipse

(b) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform der folgenden Quadrik:
$Q_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -2x_1^2 + x_2^2 - 4x_2 + 1 = 0\}$

$$\boxed{\frac{2}{3}y_1^2 - \frac{1}{3}y_2^2 + 1 = 0}$$

Geben Sie den Ursprung eines Koordinatensystems an, in dem die Quadrik euklidische Normalform hat.

$(0, 2)$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz. Geben Sie den Grenzwert an, falls dieser existiert. Falls kein Grenzwert existiert, schreiben Sie in das entsprechende Kästchen „divergent“.

	Grenzwert
$a_n = \dfrac{(-1)^n}{2} + \dfrac{1}{2}$	divergent
$a_n = 2\cos(2\pi n)$	2
$a_n = \dfrac{n-1}{n^2+2} + \dfrac{n+1}{1-2n}$	$-\dfrac{1}{2}$

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studien-gang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte	/1	/4	/4	/6	/8	/6	/3	/32

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*)

Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*4 Punkte*)

Bestimmen Sie jeweils alle Lösungen der folgenden Gleichungssysteme über $\mathbb{R}$:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie die komplexe Lösungsmenge $\mathcal{L}$ der folgenden Gleichung:

$$\frac{|z+2+4\mathrm{i}|}{|z+2-\mathrm{i}|} = 1. \qquad \mathcal{L} = \boxed{\left\{a - \tfrac{3}{2}\mathrm{i} \;\middle|\; a \in \mathbb{R}\right\}}$$

(b) Stellen Sie den Vektor $v = (3+\mathrm{i}, 4\mathrm{i}, -2+\mathrm{i})^\intercal \in \mathbb{C}^3$ als Linearkombination der Vektoren $v_1 = (1-\mathrm{i}, 0, \mathrm{i})^\intercal$ und $v_2 = (0, \mathrm{i}, 0)^\intercal$ in der Form $v = \alpha v_1 + \beta v_2$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ dar.

$$v = \boxed{(2\mathrm{i}+1)} \cdot v_1 + \boxed{4} \cdot v_2$$

Aufgabe 4 (*6 Punkte*) Gegeben seien die Punkte $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$ sowie der Vektor $v_\alpha \in \mathbb{R}^3$ wie folgt:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_\alpha = \begin{pmatrix} -4 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene an, in der A, B und C liegen:

$$\boxed{x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.}$$

(b) Geben Sie die Hessesche Normalform der Ebene aus **(a)** an:

$$\boxed{\tfrac{1}{\sqrt{5}}(2x_1 + x_2) = \tfrac{1}{\sqrt{5}}.}$$

(c) Liegen die vier Punkte A, B, C und D in einer Ebene? Bitte kreuzen Sie das Zutreffende an.

ja ☐ nein ☒

(d) Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass v_α senkrecht auf der Ebene aus **(a)** steht.

$$\alpha = \boxed{-2}$$

Aufgabe 5 (*8 Punkte*)

Die reelle Matrix A_α ist für $\alpha \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3\alpha & 3\alpha \\ \alpha & 1 & 3\alpha \end{pmatrix}.$$

Gibt es $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass A_α symmetrisch ist? Bitte kreuzen Sie das Zutreffende an.

ja ☐ nein ☒

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_{A_\alpha}(\lambda)$ in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\chi_{A_\alpha}(\lambda) = \left(\boxed{4} - \lambda\right) \cdot \left(\boxed{3\alpha + \sqrt{3\alpha}} - \lambda\right) \cdot \left(\boxed{3\alpha - \sqrt{3\alpha}} - \lambda\right)$$

Geben Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ an, für die A_α nur reelle Eigenwerte besitzt.

$$\boxed{\alpha \geqq 0}$$

Geben Sie drei linear unabhängige Eigenvektoren der Matrix A_α für $\alpha = 3$ an.

$$v_1 = \boxed{\begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ -7 \end{pmatrix}} \qquad v_2 = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad v_3 = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 6 (*6 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform der folgenden Quadrik:
$Q_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -2x_1^2 + 6x_1x_2 - 2x_2^2 - 4 = 0\}$

$$\boxed{\frac{5}{4}y_1^2 - \frac{1}{4}y_2^2 + 1 = 0}$$

Bestimmen Sie die Gestalt der Quadrik anhand der Normalform.

Hyperbel

(b) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform der folgenden Quadrik:
$Q_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - 3x_2^2 + 6x_1 + 1 = 0\}$

$$\boxed{-\frac{1}{8}y_1^2 + \frac{3}{8}y_2^2 + 1 = 0}$$

Geben Sie den Ursprung eines Koordinatensystems an, in dem die Quadrik euklidische Normalform hat.

$(-3, 0)$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz. Geben Sie den Grenzwert an, falls dieser existiert. Falls kein Grenzwert existiert, schreiben Sie in das entsprechende Kästchen „divergent“.

	Grenzwert
$a_n = \frac{1-n}{3n+1} + \frac{n-1}{2n^2}$	$-\frac{1}{3}$
$a_n = 3\cos(\pi n)$	divergent
$a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte	/1	/4	/4	/6	/8	/6	/3	/32

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*)

Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: 　　　　 **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*4 Punkte*)

Bestimmen Sie jeweils alle Lösungen der folgenden Gleichungssysteme über $\mathbb{R}$:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie die komplexe Lösungsmenge $\mathcal{L}$ der folgenden Gleichung:

$$\frac{|z+1-4\mathrm{i}|}{|z+1-\mathrm{i}|} = 1. \qquad \mathcal{L} = \boxed{\left\{ a + \tfrac{5}{2}\mathrm{i} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}}$$

(b) Stellen Sie den Vektor $v = (1+3\mathrm{i}, 5\mathrm{i}, -1+\mathrm{i})^\mathsf{T} \in \mathbb{C}^3$ als Linearkombination der Vektoren $v_1 = (2+\mathrm{i}, 0, \mathrm{i})^\mathsf{T}$ und $v_2 = (0, \mathrm{i}, 0)^\mathsf{T}$ in der Form $v = \alpha v_1 + \beta v_2$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ dar.

$$v = \boxed{(\mathrm{i}+1)} \cdot v_1 + \boxed{5} \cdot v_2$$

Aufgabe 4 (*6 Punkte*) Gegeben seien die Punkte $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$ sowie der Vektor $v_\alpha \in \mathbb{R}^3$ wie folgt:

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene an, in der A, B und C liegen:

$$\boxed{x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.}$$

(b) Geben Sie die Hessesche Normalform der Ebene aus **(a)** an:

$$\boxed{\tfrac{1}{\sqrt{5}}\,(2x_2 + x_3) = \tfrac{1}{\sqrt{5}}.}$$

(c) Liegen die vier Punkte A, B, C und D in einer Ebene? Bitte kreuzen Sie das Zutreffende an.

ja ☐ nein ☒

(d) Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass v_α senkrecht auf der Ebene aus **(a)** steht.

$$\alpha = \boxed{3}$$

Aufgabe 5 (*8 Punkte*)

Die reelle Matrix A_α ist für $\alpha \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4\alpha & 4\alpha \\ \alpha & 1 & 4\alpha \end{pmatrix}.$$

Gibt es $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass A_α symmetrisch ist? Bitte kreuzen Sie das Zutreffende an.

ja ☐ nein ☒

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_{A_\alpha}(\lambda)$ in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\chi_{A_\alpha}(\lambda) = \left(\boxed{5} - \lambda\right) \cdot \left(\boxed{4\alpha+2\sqrt{\alpha}} - \lambda\right) \cdot \left(\boxed{4\alpha-2\sqrt{\alpha}} - \lambda\right)$$

Geben Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ an, für die A_α nur reelle Eigenwerte besitzt.

$$\boxed{\alpha \geqq 0}$$

Geben Sie drei linear unabhängige Eigenvektoren der Matrix A_α für $\alpha = 1$ an.

$$v_1 = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}} \qquad v_2 = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad v_3 = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 6 (*6 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform der folgenden Quadrik:
$Q_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 5 = 0\}$

$$\boxed{-\frac{3}{5}y_1^2 - \frac{1}{5}y_2^2 + 1 = 0}$$

Bestimmen Sie die Gestalt der Quadrik anhand der Normalform.

$\boxed{\text{Ellipse}}$

(b) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform der folgenden Quadrik:
$Q_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -5x_1^2 + x_2^2 + 4x_2 + 1 = 0\}$

$$\boxed{\frac{5}{3}y_1^2 - \frac{1}{3}y_2^2 + 1 = 0}$$

Geben Sie den Ursprung eines Koordinatensystems an, in dem die Quadrik euklidische Normalform hat.

$\boxed{(0, -2)}$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz. Geben Sie den Grenzwert an, falls dieser existiert. Falls kein Grenzwert existiert, schreiben Sie in das entsprechende Kästchen „divergent“.

	Grenzwert
$a_n = \dfrac{\cos(2\pi n)}{5}$	$\dfrac{1}{5}$
$a_n = \dfrac{n+1}{1-4n} - \dfrac{n-1}{3n^2+1}$	$-\dfrac{1}{4}$
$a_n = \dfrac{(-1)^n}{3} + \dfrac{1}{3}$	divergent

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte	/1	/4	/4	/6	/8	/6	/3	/32

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*)

Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*4 Punkte*)

Bestimmen Sie jeweils alle Lösungen der folgenden Gleichungssysteme über $\mathbb{R}$:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie die komplexe Lösungsmenge $\mathcal{L}$ der folgenden Gleichung:

$$\frac{|z+1+\mathrm{i}|}{|z+1+4\mathrm{i}|} = 1. \qquad \mathcal{L} = \boxed{\left\{ a - \tfrac{5}{2}\mathrm{i} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}}$$

(b) Stellen Sie den Vektor $v = (-1+3\mathrm{i}, 6\mathrm{i}, -1-\mathrm{i})^\mathsf{T} \in \mathbb{C}^3$ als Linearkombination der Vektoren $v_1 = (2-\mathrm{i}, 0, \mathrm{i})^\mathsf{T}$ und $v_2 = (0, \mathrm{i}, 0)^\mathsf{T}$ in der Form $v = \alpha v_1 + \beta v_2$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ dar.

$$v = \boxed{(\mathrm{i}-1)} \cdot v_1 + \boxed{6} \cdot v_2$$

Aufgabe 4 (*6 Punkte*) Gegeben seien die Punkte $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$ sowie der Vektor $v_\alpha \in \mathbb{R}^3$ wie folgt:

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene an, in der A, B und C liegen:

$$\boxed{x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.}$$

(b) Geben Sie die Hessesche Normalform der Ebene aus **(a)** an:

$$\boxed{\tfrac{1}{\sqrt{5}}\,(2x_1 + x_3) = \tfrac{1}{\sqrt{5}}.}$$

(c) Liegen die vier Punkte A, B, C und D in einer Ebene? Bitte kreuzen Sie das Zutreffende an.

ja ☐ nein ☒

(d) Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass v_α senkrecht auf der Ebene aus **(a)** steht.

$$\alpha = \boxed{-4}$$

Aufgabe 5 (*8 Punkte*)

Die reelle Matrix A_α ist für $\alpha \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 9\alpha & 9\alpha \\ \alpha & 1 & 9\alpha \end{pmatrix}.$$

Gibt es $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass A_α symmetrisch ist? Bitte kreuzen Sie das Zutreffende an.

ja $\boxed{}$ nein $\boxed{\text{X}}$

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_{A_\alpha}(\lambda)$ in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\chi_{A_\alpha}(\lambda) = \left(\boxed{2} - \lambda\right) \cdot \left(\boxed{9\alpha + 3\sqrt{\alpha}} - \lambda\right) \cdot \left(\boxed{9\alpha - 3\sqrt{\alpha}} - \lambda\right)$$

Geben Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ an, für die A_α nur reelle Eigenwerte besitzt.

$$\boxed{\alpha \geqq 0}$$

Geben Sie drei linear unabhängige Eigenvektoren der Matrix A_α für $\alpha = 1$ an.

$$v_1 = \boxed{\begin{pmatrix} 20 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}} \qquad v_2 = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad v_3 = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 6 (*6 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform der folgenden Quadrik:
$Q_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - 2 = 0\}$

$$\boxed{-\frac{3}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 + 1 = 0}$$

Bestimmen Sie die Gestalt der Quadrik anhand der Normalform.

$\boxed{\text{Hyperbel}}$

(b) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform der folgenden Quadrik:
$Q_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1 + 1 = 0\}$

$$\boxed{-\frac{1}{8}y_1^2 - \frac{5}{8}y_2^2 + 1 = 0}$$

Geben Sie den Ursprung eines Koordinatensystems an, in dem die Quadrik euklidische Normalform hat.

$\boxed{(3, 0)}$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz. Geben Sie den Grenzwert an, falls dieser existiert. Falls kein Grenzwert existiert, schreiben Sie in das entsprechende Kästchen „divergent“.

	Grenzwert
$a_n = \dfrac{2n+1}{n^2} - \dfrac{4n}{n+1}$	-4
$a_n = \dfrac{\cos(\pi n)}{2}$	divergent
$a_n = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n + \dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{3}$