Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/4	/4	/3	/4	/6	/4	/5	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Geben Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$z^4 = -1 - \mathrm{i}$$

in Polarkoordinatendarstellung $r(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))$ mit $0 \leqq r$ und $0 \leqq \varphi < 2\pi$ an.

$$z_0 = 2^{1/8}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{16}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{16}\right)\right)$$

$$z_1 = 2^{1/8}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{16}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{13\pi}{16}\right)\right)$$

$$z_2 = 2^{1/8}\left(\cos\left(\frac{21\pi}{16}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{21\pi}{16}\right)\right)$$

$$z_3 = 2^{1/8}\left(\cos\left(\frac{29\pi}{16}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{29\pi}{16}\right)\right)$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*)

Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die die Ungleichung $\dfrac{x^2-2}{2x+3} \geqq x$ erfüllt ist:

$$x \in \boxed{(-\infty, -2] \cup \left(-\frac{3}{2}, -1\right]}$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Die Punkte $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$ und $C = (0,0,2)$ liegen in einer Ebene. Geben Sie die Hesse-Normalform dieser Ebene an.

$$\boxed{\tfrac{2}{3}}\, x_1 + \boxed{\tfrac{2}{3}}\, x_2 + \boxed{\tfrac{1}{3}}\, x_3 = \boxed{\tfrac{2}{3}}$$

Aufgabe 5 (*4 Punkte*) Gegeben seien die Vektoren

$$b_{1,\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad b_{2,\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_{3,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Menge aller $\alpha \in \mathbb{R}$, für die $B_\alpha : b_{1,\alpha}, b_{2,\alpha}, b_{3,\alpha}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

$$\alpha \in \boxed{\mathbb{R} \backslash \{0, 2\}}$$

(b) Sei jetzt $\alpha = 0$. Stellen Sie den Vektor $v = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf zwei **verschiedene** Arten als Linearkombination der Vektoren aus B_0 dar:

Es gibt unendlich viele Lösungen; man bekommt sie für $t \in \mathbb{R}$:

$v = (2+t) \cdot b_{1,0} + t \cdot b_{2,0} + (1-2t) \cdot b_{3,0}$

Ein mögliches Paar konkreter Lösungen ist:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{2} \cdot b_{1,0} + \boxed{0} \cdot b_{2,0} + \boxed{1} \cdot b_{3,0}\,.$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{3} \cdot b_{1,0} + \boxed{1} \cdot b_{2,0} + \boxed{-1} \cdot b_{3,0}\,.$$

Aufgabe 6 (*6 Punkte*) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante und den Rang von A:

$$\det(A) = \boxed{-1}, \qquad \operatorname{Rg}(A) = \boxed{3}$$

(b) Berechnen Sie die Inverse von A:

$$A^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} -5 & 20 & -24 \\ 4 & -15 & 18 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}}$$

(c) Berechnen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des folgenden Gleichungssystems:

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{L} = \boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 19 \\ -14 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}}$$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Es seien die Abbildungen

$$f_1 \colon [1, +\infty) \to (-\infty, 0] \colon x \mapsto -2x^2 + 1 \qquad f_2 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \colon z \mapsto \mathrm{i}(\overline{2z})^2$$

$$f_3 \colon \mathbb{C} \setminus \{2\mathrm{i}\} \to \mathbb{C} \colon z \mapsto \tfrac{1}{z-2\mathrm{i}} \qquad f_4 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \colon z \mapsto -\operatorname{Im}(z) - \operatorname{Re}(z)$$

gegeben. Prüfen Sie diese auf Injektivität und Surjektivität. Tragen Sie „Ja“ oder „Nein“ ein.

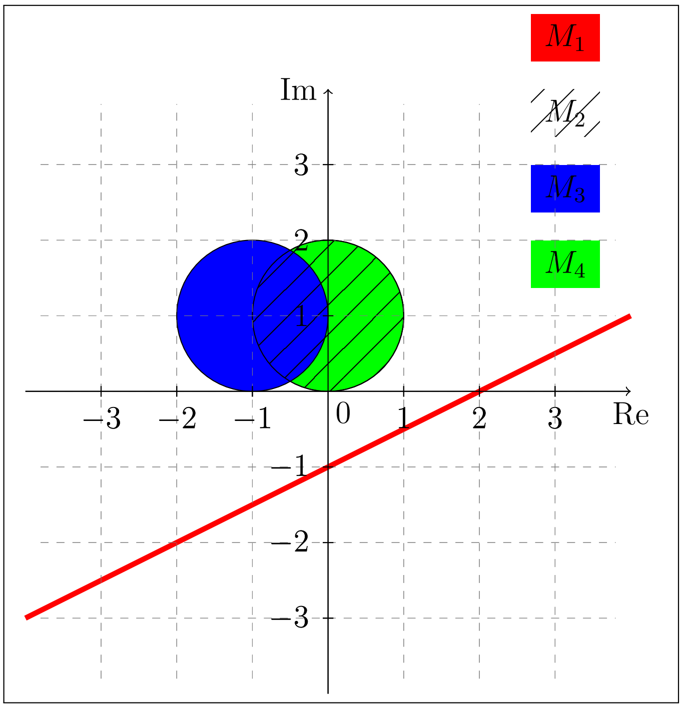
	f_1	f_2	f_3	f_4
injektiv	Ja	Nein	Ja	Nein
surjektiv	Nein	Ja	Nein	Nein

Aufgabe 8 (*5 Punkte*) Skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \operatorname{Im}(z) - \frac{1}{2}\operatorname{Re}(z) = -1 \right\}, \quad M_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - \mathrm{i}| \leqq 1 \right\}$$

$$M_3 = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\} \;\middle|\; \operatorname{Re}\left(\frac{\mathrm{i}}{z+1}\right) \geqq \frac{1}{2} \right\} \cup \{-1\} \quad \text{und} \quad M_4 = M_2 \setminus M_3$$

in der komplexen Zahlenebene.



Name, Vorname: **Matrikel-Nummer:** **Studien-gang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/4	/4	/3	/4	/6	/4	/5	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Geben Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$z^4 = -1 + \mathrm{i}$$

in Polarkoordinatendarstellung $r(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))$ mit $0 \leqq r$ und $0 \leqq \varphi < 2\pi$ an.

$$z_0 = 2^{1/8}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{16}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{16}\right)\right)$$

$$z_1 = 2^{1/8}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{16}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{11\pi}{16}\right)\right)$$

$$z_2 = 2^{1/8}\left(\cos\left(\frac{19\pi}{16}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{19\pi}{16}\right)\right)$$

$$z_3 = 2^{1/8}\left(\cos\left(\frac{27\pi}{16}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{27\pi}{16}\right)\right)$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*)

Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die die Ungleichung $\dfrac{x^2+2}{2x-1} \geqq x$ erfüllt ist:

$$x \in \boxed{(-\infty, -1] \cup \left(\frac{1}{2}, 2\right]}$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Die Punkte $A = (0,1,0)$, $B = (2,0,0)$ und $C = (0,0,1)$ liegen in einer Ebene. Geben Sie die Hesse-Normalform dieser Ebene an.

$$\boxed{\tfrac{1}{3}}\, x_1 + \boxed{\tfrac{2}{3}}\, x_2 + \boxed{\tfrac{2}{3}}\, x_3 = \boxed{\tfrac{2}{3}}$$

Aufgabe 5 (*4 Punkte*) Gegeben seien die Vektoren

$$b_{1,\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_{2,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad b_{3,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Menge aller $\alpha \in \mathbb{R}$, für die $B_\alpha : b_{1,\alpha}, b_{2,\alpha}, b_{3,\alpha}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

$$\alpha \in \boxed{\mathbb{R}\backslash\{0,1\}}$$

(b) Sei jetzt $\alpha = 0$. Stellen Sie den Vektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ auf zwei **verschiedene** Arten als Linearkombination der Vektoren aus B_0 dar:

Es gibt unendlich viele Lösungen; man bekommt sie für $t \in \mathbb{R}$:

$v = (3-t) \cdot b_{1,0} + (1-t) \cdot b_{2,0} + t \cdot b_{3,0}$

Ein mögliches Paar konkreter Lösungen ist:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \boxed{3} \cdot b_{1,0} + \boxed{1} \cdot b_{2,0} + \boxed{0} \cdot b_{3,0}\,.$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \boxed{2} \cdot b_{1,0} + \boxed{0} \cdot b_{2,0} + \boxed{1} \cdot b_{3,0}\,.$$

Aufgabe 6 (*6 Punkte*) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante und den Rang von A:

$$\det(A) = \boxed{1}, \qquad \mathrm{Rg}(A) = \boxed{3}$$

(b) Berechnen Sie die Inverse von A:

$$A^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 20 & -5 & -24 \\ -15 & 4 & 18 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}}$$

(c) Berechnen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des folgenden Gleichungssystems:

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{L} = \boxed{\left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Es seien die Abbildungen

$$f_1 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \colon z \mapsto \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z) \qquad f_2 \colon [1, +\infty) \to (-\infty, 0] \colon x \mapsto -3x^2 + 1$$
$$f_3 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \colon z \mapsto \mathrm{i}(\overline{z})^2 \qquad f_4 \colon \mathbb{C} \setminus \{-\mathrm{i}\} \to \mathbb{C} \colon z \mapsto \tfrac{2}{z+\mathrm{i}}$$

gegeben. Prüfen Sie diese auf Injektivität und Surjektivität. Tragen Sie „Ja“ oder „Nein“ ein.

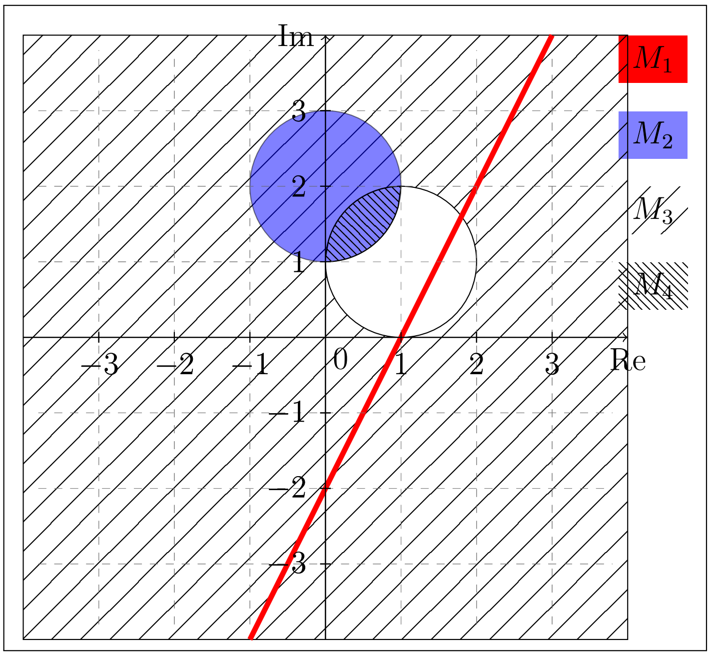
	f_1	f_2	f_3	f_4
injektiv	Nein	Ja	Nein	Ja
surjektiv	Nein	Nein	Ja	Nein

Aufgabe 8 (*5 Punkte*) Skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \operatorname{Im}(z) - 2\operatorname{Re}(z) = -2 \right\}, \quad M_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - 2\mathrm{i}| \leqq 1 \right\}$$

$$M_3 = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \;\middle|\; \operatorname{Re}\left(\frac{\mathrm{i}}{z-1} \right) \leqq \frac{1}{2} \right\} \cup \{1\} \quad \text{und} \quad M_4 = M_2 \setminus M_3$$

in der komplexen Zahlenebene.



Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/4	/4	/3	/4	/6	/4	/5	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Geben Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$z^4 = 1 - \mathrm{i}$$

in Polarkoordinatendarstellung $r(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))$ mit $0 \leqq r$ und $0 \leqq \varphi < 2\pi$ an.

$$z_0 = 2^{1/8}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{16}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{16}\right)\right)$$

$$z_1 = 2^{1/8}\left(\cos\left(\frac{15\pi}{16}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{15\pi}{16}\right)\right)$$

$$z_2 = 2^{1/8}\left(\cos\left(\frac{23\pi}{16}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{23\pi}{16}\right)\right)$$

$$z_3 = 2^{1/8}\left(\cos\left(\frac{31\pi}{16}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{31\pi}{16}\right)\right)$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*)

Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die die Ungleichung $\dfrac{x^2-2}{2x-3} \geqq x$ erfüllt ist:

$$x \in \boxed{(-\infty, 1] \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right]}$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Die Punkte $A = (0,0,1)$, $B = (0,2,0)$ und $C = (1,0,0)$ liegen in einer Ebene. Geben Sie die Hesse-Normalform dieser Ebene an.

$$\boxed{\tfrac{2}{3}}\, x_1 + \boxed{\tfrac{1}{3}}\, x_2 + \boxed{\tfrac{2}{3}}\, x_3 = \boxed{\tfrac{2}{3}}$$

Aufgabe 5 (*4 Punkte*) Gegeben seien die Vektoren

$$b_{1,\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_{2,\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_{3,\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Menge aller $\alpha \in \mathbb{R}$, für die $B_\alpha : b_{1,\alpha}, b_{2,\alpha}, b_{3,\alpha}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

$$\alpha \in \boxed{\mathbb{R} \backslash \{0, 2\}}$$

(b) Sei jetzt $\alpha = 0$. Stellen Sie den Vektor $v = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ auf zwei **verschiedene** Arten als Linearkombination der Vektoren aus B_0 dar:

Es gibt unendlich viele Lösungen; man bekommt sie für $t \in \mathbb{R}$:

$v = (3-t) \cdot b_{1,0} + (4-2t) \cdot b_{2,0} + t \cdot b_{3,0}$

Ein mögliches Paar konkreter Lösungen ist:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \boxed{3} \cdot b_{1,0} + \boxed{4} \cdot b_{2,0} + \boxed{0} \cdot b_{3,0}\,.$$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \boxed{2} \cdot b_{1,0} + \boxed{2} \cdot b_{2,0} + \boxed{1} \cdot b_{3,0}\,.$$

Aufgabe 6 (*6 Punkte*) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante und den Rang von A:

$$\det(A) = \boxed{-1}\,, \qquad \operatorname{Rg}(A) = \boxed{3}$$

(b) Berechnen Sie die Inverse von A:

$$A^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 18 & -24 & 5 \\ -15 & 20 & -4 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}}$$

(c) Berechnen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des folgenden Gleichungssystems:

$$Ax = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{L} = \boxed{\left\{ \begin{pmatrix} -13 \\ 11 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}}$$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Es seien die Abbildungen

$$f_1 \colon \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\} \to \mathbb{C} \colon z \mapsto \tfrac{2}{z-\mathrm{i}} \qquad f_2 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \colon z \mapsto \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Re}(z)$$
$$f_3 \colon [1, +\infty) \to (-\infty, 0] \colon x \mapsto -4x^2 + 1 \qquad f_4 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \colon z \mapsto 2\mathrm{i}(\overline{z})^2$$

gegeben. Prüfen Sie diese auf Injektivität und Surjektivität. Tragen Sie „Ja“ oder „Nein“ ein.

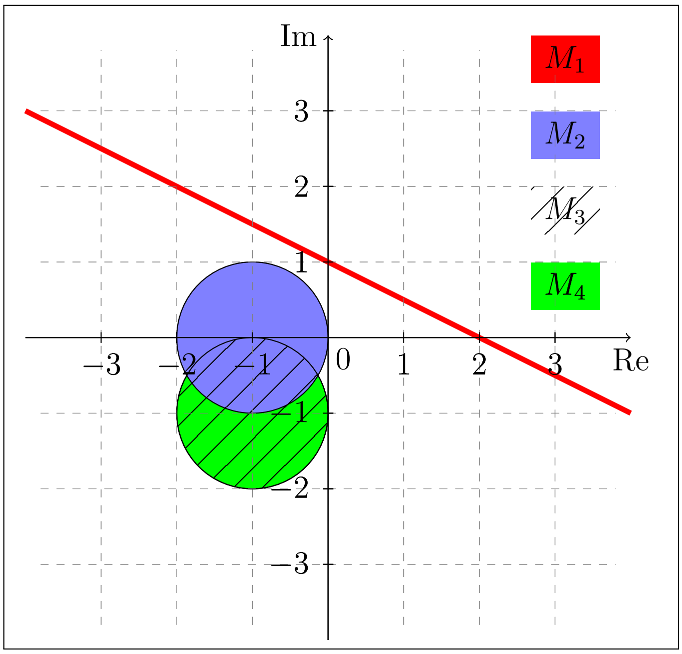
	f_1	f_2	f_3	f_4
injektiv	Ja	Nein	Ja	Nein
surjektiv	Nein	Nein	Nein	Ja

Aufgabe 8 (*5 Punkte*) Skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Im}(z) + \frac{1}{2}\operatorname{Re}(z) = 1 \right\}, \quad M_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z+1| \leqq 1 \right\}$$

$$M_3 = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\} \,\middle|\, \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\mathrm{i}(z+1)}\right) \geqq \frac{1}{2} \right\} \cup \{-1\} \quad \text{und} \quad M_4 = M_3 \setminus M_2$$

in der komplexen Zahlenebene.



Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/4	/4	/3	/4	/6	/4	/5	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Geben Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$z^4 = \mathrm{i} - 1$$

in Polarkoordinatendarstellung $r(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))$ mit $0 \leqq r$ und $0 \leqq \varphi < 2\pi$ an.

$$z_0 = 2^{1/8}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{16}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{16}\right)\right)$$

$$z_1 = 2^{1/8}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{16}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{11\pi}{16}\right)\right)$$

$$z_2 = 2^{1/8}\left(\cos\left(\frac{19\pi}{16}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{19\pi}{16}\right)\right)$$

$$z_3 = 2^{1/8}\left(\cos\left(\frac{27\pi}{16}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{27\pi}{16}\right)\right)$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*)

Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die die Ungleichung $\dfrac{x^2+2}{2x+1} \geqq x$ erfüllt ist:

$$x \in \boxed{(-\infty, -2] \cup \left(-\frac{1}{2}, 1\right]}$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Die Punkte $A = (0,1,0)$, $B = (0,0,2)$ und $C = (1,0,0)$ liegen in einer Ebene. Geben Sie die Hesse-Normalform dieser Ebene an.

$$\boxed{\tfrac{2}{3}}\, x_1 + \boxed{\tfrac{2}{3}}\, x_2 + \boxed{\tfrac{1}{3}}\, x_3 = \boxed{\tfrac{2}{3}}$$

Aufgabe 5 (*4 Punkte*) Gegeben seien die Vektoren

$$b_{1,\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad b_{2,\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_{3,\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Menge aller $\alpha \in \mathbb{R}$, für die $B_\alpha : b_{1,\alpha}, b_{2,\alpha}, b_{3,\alpha}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

$$\alpha \in \boxed{\mathbb{R}\backslash\{0,1\}}$$

(b) Sei jetzt $\alpha = 0$. Stellen Sie den Vektor $v = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ auf zwei **verschiedene** Arten als Linearkombination der Vektoren aus B_0 dar:

Es gibt unendlich viele Lösungen; man bekommt sie für $t \in \mathbb{R}$:

$v = (3-t) \cdot b_{1,0} + (2-t) \cdot b_{2,0} + t \cdot b_{3,0}$

Ein mögliches Paar konkreter Lösungen ist:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \boxed{3} \cdot b_{1,0} + \boxed{2} \cdot b_{2,0} + \boxed{0} \cdot b_{3,0}\,.$$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \boxed{2} \cdot b_{1,0} + \boxed{1} \cdot b_{2,0} + \boxed{1} \cdot b_{3,0}\,.$$

Aufgabe 6 (*6 Punkte*) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante und den Rang von A:

$$\det(A) = \boxed{1}, \qquad \operatorname{Rg}(A) = \boxed{3}$$

(b) Berechnen Sie die Inverse von A:

$$A^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 5 & -24 & 18 \\ -4 & 20 & -15 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}}$$

(c) Berechnen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des folgenden Gleichungssystems:

$$Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{L} = \boxed{\left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}}$$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Es seien die Abbildungen

$$f_1 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \colon z \mapsto (\overline{\mathrm{i}z})^2 \qquad f_2 \colon \mathbb{C} \setminus \{-2\mathrm{i}\} \to \mathbb{C} \colon z \mapsto \tfrac{1}{z+2\mathrm{i}}$$
$$f_3 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \colon z \mapsto \operatorname{Im}(z) - \operatorname{Re}(z) \qquad f_4 \colon [1, +\infty) \to (-\infty, 0] \colon x \mapsto -5x^2 + 1$$

gegeben. Prüfen Sie diese auf Injektivität und Surjektivität. Tragen Sie „Ja“ oder „Nein“ ein.

	f_1	f_2	f_3	f_4
injektiv	Nein	Ja	Nein	Ja
surjektiv	Ja	Nein	Nein	Nein

Aufgabe 8 (*5 Punkte*) Skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Im}(z) + 2\operatorname{Re}(z) = 2 \right\}, \quad M_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z + 2\mathrm{i}| \leqq 1 \right\}$$

$$M_3 = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \,\middle|\, \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\mathrm{i}(z-1)}\right) \leqq \frac{1}{2} \right\} \cup \{1\} \quad \text{und} \quad M_4 = M_2 \setminus M_3$$

in der komplexen Zahlenebene.