Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/4	/4	/3	/3	/7	/4	/5	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen und Stammfunktionen könnten hilfreich sein:

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$x\,(\ln x - 1)$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, f(x)$	$a\, x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\ln x$	$\cosh x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$a \in \mathbb{R}$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*)

Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: $\boxed{}$ **Gruppennr.:** $\boxed{}$

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie die Werte der folgenden Reihen.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(-3)^k} = \boxed{}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\ln(3))^k}{(k+1)!} \binom{k+1}{k} = \boxed{}$$

Bestimmen Sie den Entwicklungspunkt z_0 und Konvergenzradius ρ der folgenden Reihe.

$$\sum_{k=0}^{\infty} 3 \cdot (-4)^k \frac{(z+2)^k}{2k+1}, \quad z_0 = \boxed{} \qquad \rho = \boxed{}$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Berechnen Sie die ersten Ableitungen der Funktionen $f, g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $h, k : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$.

$$f(x) = x^{3x}, \quad g(x) = 2\mathrm{e}^{(x^{3x})}$$

$f'(x) = \boxed{}$ $g'(x) = \boxed{}$

$$h(x) = \frac{x^2}{\ln(x)}, \quad k(x) = \cos\left(\frac{x^2}{\ln(x)}\right)$$

$h'(x) = \boxed{}$ $k'(x) = \boxed{}$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie folgende Grenzwerte.

$$\lim_{x \to 2} \frac{5x - 10}{\sin(x-2)} = \boxed{}$$

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{5\ln(\sin(x)) + \frac{\pi}{2}}{\ln(\sin(2x))} = \boxed{}$$

$$\lim_{x \to 6} \frac{7x^2 - 252}{x - 6} = \boxed{}$$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) Berechnen Sie folgende Integrale.

$$\int x + \sqrt{2}\ln x \,\mathrm{d}\,x = \boxed{}$$

$$\int \frac{8}{(x+1)(x-3)} \,\mathrm{d}\,x = \boxed{}$$

$$\int_0^2 \frac{8}{(x+1)(x-3)} \,\mathrm{d}\,x = \boxed{}$$

Aufgabe 6 (*7 Punkte*) Gegeben sei die Funktion

$$f_\alpha \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon (x,y) \mapsto \alpha y e^x + 2x e^y \,,$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hessematrix von f_α in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\nabla f_\alpha(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{H} f_\alpha\,(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass für beliebige $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f_\alpha(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f_\alpha(x,y) - \frac{\partial}{\partial x} f_\alpha(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} f_\alpha(x,y) = -2e^y + 4e^x$$

ist.

$$\alpha = \boxed{}$$

(c) Bestimmen Sie folgende von $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängigen Polynome, wobei $T_k(f_\alpha, (x,y), (2,0))$ das Taylorpolynom k-ter Stufe an der Stelle $(2,0)$ von f_α bezeichnet.

$T_0(f_\alpha, (x,y), (2,0)) = \boxed{}$ $\quad T_1(f_\alpha, (x,y), (2,0)) = \boxed{}$

(d) Bestimmen Sie für $\alpha = 0$ das Taylorpolynom zweiter Stufe von f_0 an der Stelle $(2,0)$.

$T_2(f_0, (x,y), (2,0)) = \boxed{}$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Gegeben seien zwei differenzierbare Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Es gelte

$$f(0) = 1 \qquad \text{und} \qquad f(x) + g(x) = x^2 + \sqrt{7}x \qquad \text{und} \qquad f'(x) - g'(x) = \cos(x).$$

Bestimmen Sie $f(x)$ und $g(x)$.

$f(x) \;=\; \boxed{}$

$g(x) \;=\; \boxed{}$

Aufgabe 8 (*5 Punkte*) Gegeben sei das folgende Vektorfeld

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2xy + 5y^2 \\ x^2 + 10xy \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie ein Potential $U_g(x, y)$ von g.

$U_g(x, y) \;=\; \boxed{}$

(b) Weiter sei die Kurve Γ gegeben durch die Parametrisierung

$$C : [0, 1] \to \mathbb{R}^2 : \quad t \mapsto C(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_\Gamma g(x) \bullet \mathrm{d}\, x = \boxed{}$$

(c) Geben Sie die Divergenz des Vektorfeldes g an.

$\operatorname{div} g = \boxed{}$

(d) Die Divergenz von g sei das Potential eines Vektorfeldes $h(x, y)$. Geben Sie dieses Vektorfeld an.

$$h(x, y) = \begin{pmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \end{pmatrix}$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/4	/4	/3	/3	/7	/4	/5	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen und Stammfunktionen könnten hilfreich sein:

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$x\,(\ln x - 1)$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\ln x$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$a \in \mathbb{R}$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*)

Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: ☐ **Gruppennr.:** ☐

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie die Werte der folgenden Reihen.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1^k}{(-5)^k} = \boxed{}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\ln(2))^k}{(k+1)!}\binom{k+1}{k} = \boxed{}$$

Bestimmen Sie den Entwicklungspunkt z_0 und Konvergenzradius ρ der folgenden Reihe.

$$\sum_{k=0}^{\infty} 4\cdot(-2)^k \frac{(z-1)^k}{2k+1}, \quad z_0 = \boxed{} \quad \rho = \boxed{}$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Berechnen Sie die ersten Ableitungen der Funktionen $f, g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $h, k : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$.

$$f(x) = x^{5x}, \quad g(x) = 4\mathrm{e}^{(x^{5x})}$$

$f'(x) = \boxed{}$ $g'(x) = \boxed{}$

$$h(x) = \frac{x}{\ln(x)}, \quad k(x) = \cos\left(\frac{x}{\ln(x)}\right)$$

$h'(x) = \boxed{}$ $k'(x) = \boxed{}$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie folgende Grenzwerte.

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x - 4}{\sin(x - 2)} = \boxed{}$$

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{2\ln(\sin(x)) + \pi}{\ln(\sin(2x))} = \boxed{}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{4x^2 - 36}{x - 3} = \boxed{}$$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) Berechnen Sie folgende Integrale.

$$\int x + \sqrt{3}\ln x \,\mathrm{d}\,x = \boxed{}$$

$$\int \frac{12}{(x+1)(x-3)} \,\mathrm{d}\,x = \boxed{}$$

$$\int_0^2 \frac{12}{(x+1)(x-3)} \,\mathrm{d}\,x = \boxed{}$$

Aufgabe 6 (*7 Punkte*) Gegeben sei die Funktion

$$f_\alpha \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon (x, y) \mapsto \alpha y e^x + 3 x e^y \,,$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hessematrix von f_α in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\nabla f_\alpha(x, y) = \begin{pmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{H} f_\alpha\,(x, y) = \begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass für beliebige $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f_\alpha(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f_\alpha(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} f_\alpha(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} f_\alpha(x, y) = -3e^y + 9e^x$$

ist.

$$\alpha = \boxed{}$$

(c) Bestimmen Sie folgende von $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängigen Polynome, wobei $T_k(f_\alpha, (x, y), (2, 0))$ das Taylorpolynom k-ter Stufe an der Stelle $(2, 0)$ von f_α bezeichnet.

$$T_0(f_\alpha, (x, y), (2, 0)) = \boxed{} \qquad T_1(f_\alpha, (x, y), (2, 0)) = \boxed{}$$

(d) Bestimmen Sie für $\alpha = 0$ das Taylorpolynom zweiter Stufe von f_0 an der Stelle $(2, 0)$.

$$T_2(f_0, (x, y), (2, 0)) = \boxed{}$$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Gegeben seien zwei differenzierbare Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Es gelte

$$f(0) = 1 \qquad \text{und} \qquad f(x) + g(x) = x^2 + \sqrt{5}x \qquad \text{und} \qquad f'(x) - g'(x) = \cos(x).$$

Bestimmen Sie $f(x)$ und $g(x)$.

$f(x) \quad =$ $\boxed{}$

$g(x) \quad =$ $\boxed{}$

Aufgabe 8 (*5 Punkte*) Gegeben sei das folgende Vektorfeld

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2xy + 4y^2 \\ x^2 + 8xy \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie ein Potential $U_g(x, y)$ von g.

$U_g(x, y) \quad =$ $\boxed{}$

(b) Weiter sei die Kurve Γ gegeben durch die Parametrisierung

$$C : [0, 1] \to \mathbb{R}^2 : \quad t \mapsto C(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_\Gamma g(x) \bullet \mathrm{d}\, x = \boxed{}$$

(c) Geben Sie die Divergenz des Vektorfeldes g an.

$\operatorname{div} g =$ $\boxed{}$

(d) Die Divergenz von g sei das Potential eines Vektorfeldes $h(x, y)$. Geben Sie dieses Vektorfeld an.

$$h(x, y) = \begin{pmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \end{pmatrix}$$

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studiengang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/4	/4	/3	/3	/7	/4	/5	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen und Stammfunktionen könnten hilfreich sein:

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$x\,(\ln x - 1)$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, f(x)$	$a\, x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\ln x$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$a \in \mathbb{R}$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*)

Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie die Werte der folgenden Reihen.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{(-4)^k} = \boxed{}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\ln(6))^k}{(k+1)!} \binom{k+1}{k} = \boxed{}$$

Bestimmen Sie den Entwicklungspunkt z_0 und Konvergenzradius ρ der folgenden Reihe.

$$\sum_{k=0}^{\infty} 5 \cdot (-3)^k \frac{(1+z)^k}{2k+1}, \quad z_0 = \boxed{} \qquad \rho = \boxed{}$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Berechnen Sie die ersten Ableitungen der Funktionen $f, g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $h, k : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$.

$$f(x) = x^{2x}, \quad g(x) = 6\mathrm{e}^{(x^{2x})}$$

$f'(x) =$ $\boxed{}$ $g'(x) =$ $\boxed{}$

$$h(x) = \frac{x^3}{\ln(x)}, \quad k(x) = \cos\left(\frac{x^3}{\ln(x)}\right)$$

$h'(x) =$ $\boxed{}$ $k'(x) =$ $\boxed{}$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie folgende Grenzwerte.

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x-6}{\sin(x-2)} = \boxed{}$$

$$\lim_{x\searrow 0} \frac{3\ln(\sin(x)) - 2\pi}{\ln(\sin(2x))} = \boxed{}$$

$$\lim_{x\to 5} \frac{6x^2-150}{x-5} = \boxed{}$$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) Berechnen Sie folgende Integrale.

$$\int x + \sqrt{5}\ln x \,\mathrm{d}\,x \quad = \boxed{}$$

$$\int \frac{16}{(x+1)(x-3)} \,\mathrm{d}\,x \quad = \boxed{}$$

$$\int_0^2 \frac{16}{(x+1)(x-3)} \,\mathrm{d}\,x \quad = \boxed{}$$

Aufgabe 6 (*7 Punkte*) Gegeben sei die Funktion

$$f_\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \alpha y e^x + 4xe^y\,,$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hessematrix von f_α in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\nabla f_\alpha(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{H} f_\alpha\,(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass für beliebige $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f_\alpha(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f_\alpha(x,y) - \frac{\partial}{\partial x} f_\alpha(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} f_\alpha(x,y) = -4e^y + 16e^x$$

ist.

$$\alpha = \boxed{}$$

(c) Bestimmen Sie folgende von $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängigen Polynome, wobei $T_k(f_\alpha,(x,y),(2,0))$ das Taylorpolynom k-ter Stufe an der Stelle $(2,0)$ von f_α bezeichnet.

$T_0(f_\alpha,(x,y),(2,0)) = \boxed{}$ $T_1(f_\alpha,(x,y),(2,0)) = \boxed{}$

(d) Bestimmen Sie für $\alpha = 0$ das Taylorpolynom zweiter Stufe von f_0 an der Stelle $(2,0)$.

$T_2(f_0,(x,y),(2,0)) = \boxed{}$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Gegeben seien zwei differenzierbare Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Es gelte

$$f(0) = 1 \qquad \text{und} \qquad f(x) + g(x) = x^2 + \sqrt{3}x \qquad \text{und} \qquad f'(x) - g'(x) = \cos(x).$$

Bestimmen Sie $f(x)$ und $g(x)$.

$f(x) =$ $\boxed{}$

$g(x) =$ $\boxed{}$

Aufgabe 8 (*5 Punkte*) Gegeben sei das folgende Vektorfeld

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2xy + 3y^2 \\ x^2 + 6xy \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie ein Potential $U_g(x, y)$ von g.

$U_g(x, y) =$ $\boxed{}$

(b) Weiter sei die Kurve Γ gegeben durch die Parametrisierung

$$C : [0, 1] \to \mathbb{R}^2 : \quad t \mapsto C(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_\Gamma g(x) \bullet \mathrm{d}\, x = \boxed{}$$

(c) Geben Sie die Divergenz des Vektorfeldes g an.

$\operatorname{div} g =$ $\boxed{}$

(d) Die Divergenz von g sei das Potential eines Vektorfeldes $h(x, y)$. Geben Sie dieses Vektorfeld an.

$$h(x, y) = \begin{pmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \end{pmatrix}$$

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studien-gang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/4	/4	/3	/3	/7	/4	/5	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen und Stammfunktionen könnten hilfreich sein:

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$x(\ln x - 1)$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\ln x$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$a \in \mathbb{R}$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*)

Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie die Werte der folgenden Reihen.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1^k}{(-6)^k} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\ln(5))^k}{(k+1)!} \binom{k+1}{k} =$$

Bestimmen Sie den Entwicklungspunkt z_0 und Konvergenzradius ρ der folgenden Reihe.

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2 \cdot (-5)^k \frac{(z+6)^k}{2k+1}, \qquad z_0 = \qquad \rho =$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Berechnen Sie die ersten Ableitungen der Funktionen $f, g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $h, k : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$.

$$f(x) = x^{4x}, \quad g(x) = 4\mathrm{e}^{(x^{4x})}$$

$f'(x) = \boxed{}$ $g'(x) = \boxed{}$

$$h(x) = \frac{x^4}{\ln(x)}, \quad k(x) = \cos\left(\frac{x^4}{\ln(x)}\right)$$

$h'(x) = \boxed{}$ $k'(x) = \boxed{}$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie folgende Grenzwerte.

$$\lim_{x\to 2} \frac{\frac{x}{2} - 1}{\sin(x-2)} = \boxed{}$$

$$\lim_{x\searrow 0} \frac{4\ln(\sin(x)) + 3\pi^2}{\ln(\sin(2x))} = \boxed{}$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{5x^2 - 80}{x - 4} = \boxed{}$$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) Berechnen Sie folgende Integrale.

$$\int x + \sqrt{7}\ln x \,\mathrm{d}\,x \quad = \boxed{}$$

$$\int \frac{20}{(x+1)(x-3)} \,\mathrm{d}\,x \quad = \boxed{}$$

$$\int_0^2 \frac{20}{(x+1)(x-3)} \,\mathrm{d}\,x \quad = \boxed{}$$

Aufgabe 6 (*7 Punkte*) Gegeben sei die Funktion

$$f_\alpha \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon (x, y) \mapsto \alpha y e^x + 5 x e^y \,,$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hessematrix von f_α in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\nabla f_\alpha(x, y) = \begin{pmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{H} f_\alpha\,(x, y) = \begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass für beliebige $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f_\alpha(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f_\alpha(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} f_\alpha(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} f_\alpha(x, y) = -5e^y + 25e^x$$

ist.

$$\alpha = \boxed{}$$

(c) Bestimmen Sie folgende von $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängigen Polynome, wobei $T_k(f_\alpha, (x, y), (2, 0))$ das Taylorpolynom k-ter Stufe an der Stelle $(2, 0)$ von f_α bezeichnet.

$$T_0(f_\alpha, (x, y), (2, 0)) = \boxed{} \qquad T_1(f_\alpha, (x, y), (2, 0)) = \boxed{}$$

(d) Bestimmen Sie für $\alpha = 0$ das Taylorpolynom zweiter Stufe von f_0 an der Stelle $(2, 0)$.

$$T_2(f_0, (x, y), (2, 0)) = \boxed{}$$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Gegeben seien zwei differenzierbare Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Es gelte

$$f(0) = 1 \qquad \text{und} \qquad f(x) + g(x) = x^2 + \sqrt{2}x \qquad \text{und} \qquad f'(x) - g'(x) = \cos(x).$$

Bestimmen Sie $f(x)$ und $g(x)$.

$f(x) \;=\; \boxed{}$

$g(x) \;=\; \boxed{}$

Aufgabe 8 (*5 Punkte*) Gegeben sei das folgende Vektorfeld

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2xy + 2y^2 \\ x^2 + 4xy \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie ein Potential $U_g(x, y)$ von g.

$U_g(x, y) \;=\; \boxed{}$

(b) Weiter sei die Kurve Γ gegeben durch die Parametrisierung

$$C : [0, 1] \to \mathbb{R}^2 : \quad t \mapsto C(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_\Gamma g(x) \bullet \mathrm{d}\,x = \boxed{}$$

(c) Geben Sie die Divergenz des Vektorfeldes g an.

$\operatorname{div} g = \boxed{}$

(d) Die Divergenz von g sei das Potential eines Vektorfeldes $h(x, y)$. Geben Sie dieses Vektorfeld an.

$$h(x, y) = \begin{pmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \end{pmatrix}$$
