Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/4	/4	/3	/3	/7	/4	/5	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen und Stammfunktionen könnten hilfreich sein:

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$x\,(\ln x - 1)$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\ln x$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$a \in \mathbb{R}$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*)

Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:		**Gruppennr.:**	

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie die Werte der folgenden Reihen.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(-3)^k} = \boxed{\frac{3}{5}}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\ln(3))^k}{(k+1)!} \binom{k+1}{k} = \boxed{3}$$

Bestimmen Sie den Entwicklungspunkt z_0 und Konvergenzradius ρ der folgenden Reihe.

$$\sum_{k=0}^{\infty} 3 \cdot (-4)^k \frac{(z+2)^k}{2k+1}, \quad z_0 = \boxed{-2} \quad \rho = \boxed{\frac{1}{4}}$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Berechnen Sie die ersten Ableitungen der Funktionen $f, g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $h, k : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$.

$$f(x) = x^{3x}, \quad g(x) = 2\mathrm{e}^{(x^{3x})}$$

$$f'(x) = \boxed{3(1+\ln(x))x^{3x}} \qquad g'(x) = \boxed{6(1+\ln(x))x^{3x}\mathrm{e}^{(x^{3x})}}$$

$$h(x) = \frac{x^2}{\ln(x)}, \quad k(x) = \cos\left(\frac{x^2}{\ln(x)}\right)$$

$$h'(x) = \boxed{\frac{x(2\ln(x)-1)}{(\ln(x))^2}} \qquad k'(x) = \boxed{\frac{x(1-2\ln(x))}{(\ln(x))^2}\sin\left(\frac{x^2}{\ln(x)}\right)}$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie folgende Grenzwerte.

$$\lim_{x\to 2} \frac{5x-10}{\sin(x-2)} = \boxed{5}$$

$$\lim_{x\searrow 0} \frac{5\ln(\sin(x)) + \frac{\pi}{2}}{\ln(\sin(2x))} = \boxed{5}$$

$$\lim_{x\to 6} \frac{7x^2-252}{x-6} = \boxed{84}$$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) Berechnen Sie folgende Integrale.

$$\int x + \sqrt{2}\ln x \,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[\frac{x^2}{2} + \sqrt{2}(x\ln x - x)\right]}$$

$$\int \frac{8}{(x+1)(x-3)}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{[-2\ln|x+1| + 2\ln|x-3|]}$$

$$\int_0^2 \frac{8}{(x+1)(x-3)}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{-4\ln(3)}$$

Aufgabe 6 (*7 Punkte*) Gegeben sei die Funktion

$$f_\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \alpha y e^x + 2xe^y\,,$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hessematrix von f_α in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\nabla f_\alpha(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{\alpha y e^x + 2e^y} \\ \boxed{\alpha e^x + 2xe^y} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{H} f_\alpha\,(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{\alpha y e^x} & \boxed{\alpha e^x + 2e^y} \\ \boxed{\alpha e^x + 2e^y} & \boxed{2xe^y} \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass für beliebige $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f_\alpha(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f_\alpha(x,y) - \frac{\partial}{\partial x} f_\alpha(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} f_\alpha(x,y) = -2e^y + 4e^x$$

ist.

$$\alpha = \boxed{-4}$$

(c) Bestimmen Sie folgende von $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängigen Polynome, wobei $T_k(f_\alpha,(x,y),(2,0))$ das Taylorpolynom k-ter Stufe an der Stelle $(2,0)$ von f_α bezeichnet.

$$T_0(f_\alpha,(x,y),(2,0)) = \boxed{4} \qquad T_1(f_\alpha,(x,y),(2,0)) = \boxed{4 + 2(x-2) + (\alpha e^2 + 4)y}$$

(d) Bestimmen Sie für $\alpha = 0$ das Taylorpolynom zweiter Stufe von f_0 an der Stelle $(2,0)$.

$$T_2(f_0,(x,y),(2,0)) = \boxed{4 + 2(x-2) + 4y + 2(x-2)y + 2y^2}$$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Gegeben seien zwei differenzierbare Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Es gelte

$$f(0) = 1 \qquad \text{und} \qquad f(x) + g(x) = x^2 + \sqrt{7}x \qquad \text{und} \qquad f'(x) - g'(x) = \cos(x).$$

Bestimmen Sie $f(x)$ und $g(x)$.

$$f(x) = \boxed{\frac{x^2}{2} + \frac{\sin(x)}{2} + 1 + \frac{\sqrt{7}x}{2}}$$

$$g(x) = \boxed{\frac{x^2}{2} - \frac{\sin(x)}{2} - 1 + \frac{\sqrt{7}x}{2}}$$

Aufgabe 8 (*5 Punkte*) Gegeben sei das folgende Vektorfeld

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2xy + 5y^2 \\ x^2 + 10xy \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie ein Potential $U_g(x, y)$ von g.

$$U_g(x, y) = \boxed{x^2y + 5xy^2}$$

(b) Weiter sei die Kurve Γ gegeben durch die Parametrisierung

$$C : [0, 1] \to \mathbb{R}^2 : \quad t \mapsto C(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_\Gamma g(x) \bullet \mathrm{d}\,x = \boxed{6}$$

(c) Geben Sie die Divergenz des Vektorfeldes g an.

$$\operatorname{div} g = \boxed{2y + 10x}$$

(d) Die Divergenz von g sei das Potential eines Vektorfeldes $h(x, y)$. Geben Sie dieses Vektorfeld an.

$$h(x, y) = \begin{pmatrix} \boxed{10} \\ \boxed{2} \end{pmatrix}$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/4	/4	/3	/3	/7	/4	/5	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen und Stammfunktionen könnten hilfreich sein:

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$x\,(\ln x - 1)$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\ln x$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$a \in \mathbb{R}$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*)

Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie die Werte der folgenden Reihen.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1^k}{(-5)^k} = \boxed{\frac{5}{6}}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\ln(2))^k}{(k+1)!}\binom{k+1}{k} = \boxed{2}$$

Bestimmen Sie den Entwicklungspunkt z_0 und Konvergenzradius ρ der folgenden Reihe.

$$\sum_{k=0}^{\infty} 4 \cdot (-2)^k \frac{(z-1)^k}{2k+1}, \quad z_0 = \boxed{1} \qquad \rho = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Berechnen Sie die ersten Ableitungen der Funktionen $f, g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $h, k : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$.

$$f(x) = x^{5x}, \quad g(x) = 4\mathrm{e}^{(x^{5x})}$$

$$f'(x) = \boxed{5(1 + \ln(x))x^{5x}} \qquad g'(x) = \boxed{20(1 + \ln(x))x^{5x}\mathrm{e}^{(x^{5x})}}$$

$$h(x) = \frac{x}{\ln(x)}, \quad k(x) = \cos\left(\frac{x}{\ln(x)}\right)$$

$$h'(x) = \boxed{\frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2}} \qquad k'(x) = \boxed{\frac{1 - \ln(x)}{(\ln(x))^2} \sin\left(\frac{x}{\ln(x)}\right)}$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie folgende Grenzwerte.

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x - 4}{\sin(x - 2)} = \boxed{2}$$

$$\lim_{x\searrow 0} \frac{2\ln(\sin(x)) + \pi}{\ln(\sin(2x))} = \boxed{2}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{4x^2 - 36}{x - 3} = \boxed{24}$$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) Berechnen Sie folgende Integrale.

$$\int x + \sqrt{3}\ln x \,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[\tfrac{x^2}{2} + \sqrt{3}(x\ln x - x)\right]}$$

$$\int \frac{12}{(x+1)(x-3)} \,\mathrm{d}\,x = \boxed{[-3\ln|x+1| + 3\ln|x-3|]}$$

$$\int_0^2 \frac{12}{(x+1)(x-3)} \,\mathrm{d}\,x = \boxed{-6\ln(3)}$$

Aufgabe 6 (*7 Punkte*) Gegeben sei die Funktion

$$f_\alpha \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon (x,y) \mapsto \alpha y e^x + 3xe^y\,,$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hessematrix von f_α in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\nabla f_\alpha(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{\alpha y e^x + 3e^y} \\ \boxed{\alpha e^x + 3xe^y} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{H} f_\alpha\,(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{\alpha y e^x} & \boxed{\alpha e^x + 3e^y} \\ \boxed{\alpha e^x + 3e^y} & \boxed{3xe^y} \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass für beliebige $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f_\alpha(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f_\alpha(x,y) - \frac{\partial}{\partial x} f_\alpha(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} f_\alpha(x,y) = -3e^y + 9e^x$$

ist.

$$\alpha = \boxed{-9}$$

(c) Bestimmen Sie folgende von $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängigen Polynome, wobei $T_k(f_\alpha, (x,y), (2,0))$ das Taylorpolynom k-ter Stufe an der Stelle $(2,0)$ von f_α bezeichnet.

$$T_0(f_\alpha, (x,y), (2,0)) = \boxed{6} \qquad T_1(f_\alpha, (x,y), (2,0)) = \boxed{6 + 3(x-2) + (\alpha e^2 + 6)y}$$

(d) Bestimmen Sie für $\alpha = 0$ das Taylorpolynom zweiter Stufe von f_0 an der Stelle $(2,0)$.

$$T_2(f_0, (x,y), (2,0)) = \boxed{6 + 3(x-2) + 6y + 3(x-2)y + 3y^2}$$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Gegeben seien zwei differenzierbare Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Es gelte

$$f(0) = 1 \qquad \text{und} \qquad f(x) + g(x) = x^2 + \sqrt{5}x \qquad \text{und} \qquad f'(x) - g'(x) = \cos(x).$$

Bestimmen Sie $f(x)$ und $g(x)$.

$$f(x) = \boxed{\frac{x^2}{2} + \frac{\sin(x)}{2} + 1 + \frac{\sqrt{5}x}{2}}$$

$$g(x) = \boxed{\frac{x^2}{2} - \frac{\sin(x)}{2} - 1 + \frac{\sqrt{5}x}{2}}$$

Aufgabe 8 (*5 Punkte*) Gegeben sei das folgende Vektorfeld

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2xy + 4y^2 \\ x^2 + 8xy \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie ein Potential $U_g(x, y)$ von g.

$$U_g(x,y) = \boxed{x^2y + 4xy^2}$$

(b) Weiter sei die Kurve Γ gegeben durch die Parametrisierung

$$C : [0,1] \to \mathbb{R}^2 : \quad t \mapsto C(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_\Gamma g(x) \bullet \mathrm{d}\,x = \boxed{5}$$

(c) Geben Sie die Divergenz des Vektorfeldes g an.

$$\operatorname{div} g = \boxed{2y + 8x}$$

(d) Die Divergenz von g sei das Potential eines Vektorfeldes $h(x, y)$. Geben Sie dieses Vektorfeld an.

$$h(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{8} \\ \boxed{2} \end{pmatrix}$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/4	/4	/3	/3	/7	/4	/5	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen und Stammfunktionen könnten hilfreich sein:

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$x(\ln x - 1)$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\ln x$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$a \in \mathbb{R}$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*)

Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: ☐ **Gruppennr.:** ☐

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie die Werte der folgenden Reihen.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{(-4)^k} = \boxed{\frac{4}{7}}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\ln(6))^k}{(k+1)!}\binom{k+1}{k} = \boxed{6}$$

Bestimmen Sie den Entwicklungspunkt z_0 und Konvergenzradius ρ der folgenden Reihe.

$$\sum_{k=0}^{\infty} 5 \cdot (-3)^k \frac{(1+z)^k}{2k+1}, \quad z_0 = \boxed{-1} \qquad \rho = \boxed{\frac{1}{3}}$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Berechnen Sie die ersten Ableitungen der Funktionen $f, g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $h, k : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$.

$$f(x) = x^{2x}, \quad g(x) = 6\mathrm{e}^{(x^{2x})}$$

$$f'(x) = \boxed{2(1 + \ln(x))x^{2x}} \qquad g'(x) = \boxed{12(1 + \ln(x))x^{2x}\mathrm{e}^{(x^{2x})}}$$

$$h(x) = \frac{x^3}{\ln(x)}, \quad k(x) = \cos\left(\frac{x^3}{\ln(x)}\right)$$

$$h'(x) = \boxed{\frac{x^2(3\ln(x) - 1)}{(\ln(x))^2}} \qquad k'(x) = \boxed{\frac{x^2(1 - 3\ln(x))}{(\ln(x))^2}\sin\left(\frac{x^3}{\ln(x)}\right)}$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie folgende Grenzwerte.

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x - 6}{\sin(x - 2)} = \boxed{3}$$

$$\lim_{x\searrow 0} \frac{3\ln(\sin(x)) - 2\pi}{\ln(\sin(2x))} = \boxed{3}$$

$$\lim_{x\to 5} \frac{6x^2 - 150}{x - 5} = \boxed{60}$$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) Berechnen Sie folgende Integrale.

$$\int x + \sqrt{5}\ln x \,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[\tfrac{x^2}{2} + \sqrt{5}(x\ln x - x)\right]}$$

$$\int \frac{16}{(x+1)(x-3)} \,\mathrm{d}\,x = \boxed{[-4\ln|x+1| + 4\ln|x-3|]}$$

$$\int_0^2 \frac{16}{(x+1)(x-3)} \,\mathrm{d}\,x = \boxed{-8\ln(3)}$$

Aufgabe 6 (*7 Punkte*) Gegeben sei die Funktion

$$f_\alpha \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon (x,y) \mapsto \alpha y e^x + 4xe^y \,,$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hessematrix von f_α in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\nabla f_\alpha(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{\alpha y e^x + 4e^y} \\ \boxed{\alpha e^x + 4xe^y} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{H} f_\alpha\,(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{\alpha y e^x} & \boxed{\alpha e^x + 4e^y} \\ \boxed{\alpha e^x + 4e^y} & \boxed{4xe^y} \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass für beliebige $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f_\alpha(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f_\alpha(x,y) - \frac{\partial}{\partial x} f_\alpha(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} f_\alpha(x,y) = -4e^y + 16e^x$$

ist.

$$\alpha = \boxed{-16}$$

(c) Bestimmen Sie folgende von $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängigen Polynome, wobei $T_k(f_\alpha,(x,y),(2,0))$ das Taylorpolynom k-ter Stufe an der Stelle $(2,0)$ von f_α bezeichnet.

$$T_0(f_\alpha,(x,y),(2,0)) = \boxed{8} \qquad T_1(f_\alpha,(x,y),(2,0)) = \boxed{8 + 4(x-2) + (\alpha e^2 + 8)y}$$

(d) Bestimmen Sie für $\alpha = 0$ das Taylorpolynom zweiter Stufe von f_0 an der Stelle $(2,0)$.

$$T_2(f_0,(x,y),(2,0)) = \boxed{8 + 4(x-2) + 8y + 4(x-2)y + 4y^2}$$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Gegeben seien zwei differenzierbare Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Es gelte

$$f(0) = 1 \qquad \text{und} \qquad f(x) + g(x) = x^2 + \sqrt{3}x \qquad \text{und} \qquad f'(x) - g'(x) = \cos(x).$$

Bestimmen Sie $f(x)$ und $g(x)$.

$$f(x) \quad = \quad \boxed{\frac{x^2}{2} + \frac{\sin(x)}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}x}{2}}$$

$$g(x) \quad = \quad \boxed{\frac{x^2}{2} - \frac{\sin(x)}{2} - 1 + \frac{\sqrt{3}x}{2}}$$

Aufgabe 8 (*5 Punkte*) Gegeben sei das folgende Vektorfeld

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2xy + 3y^2 \\ x^2 + 6xy \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie ein Potential $U_g(x, y)$ von g.

$$U_g(x, y) \quad = \quad \boxed{x^2y + 3xy^2}$$

(b) Weiter sei die Kurve Γ gegeben durch die Parametrisierung

$$C : [0, 1] \to \mathbb{R}^2 : \quad t \mapsto C(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_\Gamma g(x) \bullet \mathrm{d}\, x = \boxed{4}$$

(c) Geben Sie die Divergenz des Vektorfeldes g an.

$$\operatorname{div} g = \boxed{2y + 6x}$$

(d) Die Divergenz von g sei das Potential eines Vektorfeldes $h(x, y)$. Geben Sie dieses Vektorfeld an.

$$h(x, y) = \begin{pmatrix} \boxed{6} \\ \boxed{2} \end{pmatrix}$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/4	/4	/3	/3	/7	/4	/5	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen und Stammfunktionen könnten hilfreich sein:

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$x\,(\ln x - 1)$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\ln x$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$a \in \mathbb{R}$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*)

Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie die Werte der folgenden Reihen.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1^k}{(-6)^k} = \boxed{\frac{6}{7}}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\ln(5))^k}{(k+1)!}\binom{k+1}{k} = \boxed{5}$$

Bestimmen Sie den Entwicklungspunkt z_0 und Konvergenzradius ρ der folgenden Reihe.

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2\cdot(-5)^k \frac{(z+6)^k}{2k+1}, \quad z_0 = \boxed{-6} \qquad \rho = \boxed{\frac{1}{5}}$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Berechnen Sie die ersten Ableitungen der Funktionen $f, g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $h, k : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$.

$$f(x) = x^{4x}, \quad g(x) = 4\mathrm{e}^{(x^{4x})}$$

$$f'(x) = \boxed{4(1+\ln(x))x^{4x}} \qquad g'(x) = \boxed{16(1+\ln(x))x^{4x}\mathrm{e}^{(x^{4x})}}$$

$$h(x) = \frac{x^4}{\ln(x)}, \quad k(x) = \cos\left(\frac{x^4}{\ln(x)}\right)$$

$$h'(x) = \boxed{\frac{x^3(4\ln(x)-1)}{(\ln(x))^2}} \qquad k'(x) = \boxed{\frac{x^3(1-4\ln(x))}{(\ln(x))^2}\sin\left(\frac{x^4}{\ln(x)}\right)}$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie folgende Grenzwerte.

$$\lim_{x\to 2} \frac{\frac{x}{2}-1}{\sin(x-2)} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x\searrow 0} \frac{4\ln(\sin(x))+3\pi^2}{\ln(\sin(2x))} = \boxed{4}$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{5x^2-80}{x-4} = \boxed{40}$$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) Berechnen Sie folgende Integrale.

$$\int x + \sqrt{7}\ln x \,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[\tfrac{x^2}{2} + \sqrt{7}(x\ln x - x)\right]}$$

$$\int \frac{20}{(x+1)(x-3)}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{[-5\ln|x+1| + 5\ln|x-3|]}$$

$$\int_0^2 \frac{20}{(x+1)(x-3)}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{-10\ln(3)}$$

Aufgabe 6 (*7 Punkte*) Gegeben sei die Funktion

$$f_\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \alpha y e^x + 5xe^y\,,$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hessematrix von f_α in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\nabla f_\alpha(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{\alpha y e^x + 5e^y} \\ \boxed{\alpha e^x + 5xe^y} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{H}f_\alpha\,(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{\alpha y e^x} & \boxed{\alpha e^x + 5e^y} \\ \boxed{\alpha e^x + 5e^y} & \boxed{5xe^y} \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass für beliebige $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f_\alpha(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f_\alpha(x,y) - \frac{\partial}{\partial x} f_\alpha(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} f_\alpha(x,y) = -5e^y + 25e^x$$

ist.

$$\alpha = \boxed{-25}$$

(c) Bestimmen Sie folgende von $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängigen Polynome, wobei $T_k(f_\alpha,(x,y),(2,0))$ das Taylorpolynom k-ter Stufe an der Stelle $(2,0)$ von f_α bezeichnet.

$$T_0(f_\alpha,(x,y),(2,0)) = \boxed{10} \qquad T_1(f_\alpha,(x,y),(2,0)) = \boxed{10 + 5(x-2) + (\alpha e^2 + 10)y}$$

(d) Bestimmen Sie für $\alpha = 0$ das Taylorpolynom zweiter Stufe von f_0 an der Stelle $(2,0)$.

$$T_2(f_0,(x,y),(2,0)) = \boxed{10 + 5(x-2) + 10y + 5(x-2)y + 5y^2}$$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Gegeben seien zwei differenzierbare Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Es gelte

$$f(0) = 1 \qquad \text{und} \qquad f(x) + g(x) = x^2 + \sqrt{2}x \qquad \text{und} \qquad f'(x) - g'(x) = \cos(x).$$

Bestimmen Sie $f(x)$ und $g(x)$.

$$f(x) = \boxed{\frac{x^2}{2} + \frac{\sin(x)}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}x}{2}}$$

$$g(x) = \boxed{\frac{x^2}{2} - \frac{\sin(x)}{2} - 1 + \frac{\sqrt{2}x}{2}}$$

Aufgabe 8 (*5 Punkte*) Gegeben sei das folgende Vektorfeld

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2xy + 2y^2 \\ x^2 + 4xy \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie ein Potential $U_g(x, y)$ von g.

$$U_g(x, y) = \boxed{x^2y + 2xy^2}$$

(b) Weiter sei die Kurve Γ gegeben durch die Parametrisierung

$$C : [0, 1] \to \mathbb{R}^2 : \quad t \mapsto C(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_\Gamma g(x) \bullet \mathrm{d}\,x = \boxed{3}$$

(c) Geben Sie die Divergenz des Vektorfeldes g an.

$$\operatorname{div} g = \boxed{2y + 4x}$$

(d) Die Divergenz von g sei das Potential eines Vektorfeldes $h(x, y)$. Geben Sie dieses Vektorfeld an.

$$h(x, y) = \begin{pmatrix} \boxed{4} \\ \boxed{2} \end{pmatrix}$$
