Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studiengang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/3	/4	/3	/9	/7	/2	/2	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Gegeben ist das Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Bestimmen Sie die Koordinatentransformationen von $\mathbb{F}$-Koordinaten auf Standardkoordinaten und umgekehrt.

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} : v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}\ v + \boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}}, \quad {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} : v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}}\ v + \boxed{\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*)

Gegeben sind zwei affine Abbildungen $\alpha, \beta \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die in Standardkoordinaten folgende Darstellungen haben:

$$\alpha : v \mapsto \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta : v \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie die Verkettung $\alpha \circ \beta$ der beiden Abbildungen an:

$$\alpha \circ \beta \colon v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} -5 & -12 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}} \; v + \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

(b) Geben Sie die zu α inverse Abbildung α^{-1} an:

$$\alpha^{-1} \colon v \mapsto \boxed{\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}} \; v + \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*)

Stellt die Matrix A eine Drehung um den Ursprung oder eine Spiegelung an einer Ursprungsgeraden dar?

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Determinante der Matrix A:

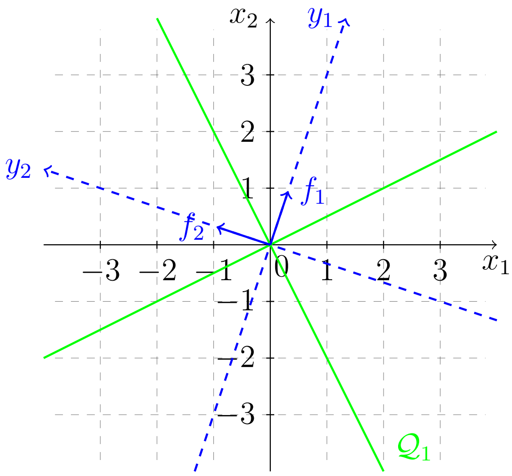
$$\det(A) = \boxed{-1}$$

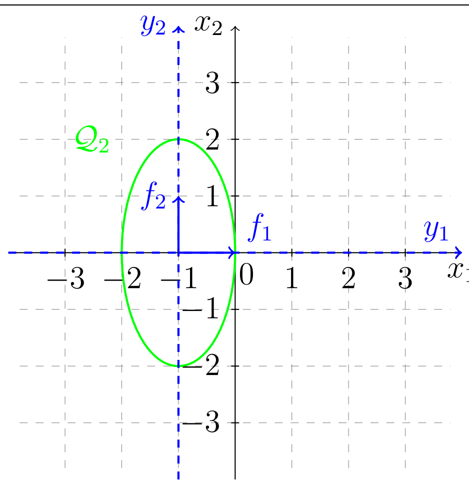
Kreuzen Sie an: A beschreibt eine ☐ Drehung, ☒ Spiegelung.

Bestimmen Sie je nachdem den Drehwinkel $\varphi \in (0, 2\pi]$ oder die Gerade g, an der gespiegelt wird:

$$\boxed{g = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

Aufgabe 5 (*9 Punkte*) Bestimmen Sie für die folgenden Quadriken ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$, in dem diese Quadriken euklidische Normalform haben. Geben Sie die Gleichungen der Quadriken in diesem Koordinatensystem an. Skizzieren Sie die neuen Koordinatensysteme samt den Quadriken im Standardkoordinatensystem.

$\mathcal{Q}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -4x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_1x_2 = 0 \right\}$	
$\mathbb{F}$	$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
euklidische Normalform	$y_1^2 - y_2^2 = 0$
Skizze	

$\mathcal{Q}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 4x_1^2 + x_2^2 + 8x_1 = 0 \right\}$	
$\mathbb{F}$	$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
euklidische Normalform	$-y_1^2 - \frac{1}{4}y_2^2 + 1 = 0$
Skizze	

Aufgabe 6 (*7 Punkte*) Gegeben ist die folgende reelle Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -16 \\ -4 & -8 & -2 \\ 8 & 0 & -14 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ von A in Abhängigkeit von λ an:

$$\chi_A(\lambda) = \boxed{-\lambda^3 - 12\lambda^2 - 20\lambda + 96 = -(\lambda+8)(\lambda+6)(\lambda-2)}$$

(b) Es ist $v_1 = (0,1,0)^\top$ ein Eigenvektor mit Eigenwert μ_1 der Matrix A. Berechnen Sie μ_1:

$$\mu_1 = \boxed{-8}$$

(c) Bestimmen Sie die weiteren Eigenwerte μ_2, μ_3 und zugehörige Eigenvektoren v_2, v_3 von A:

$$\mu_2 = \boxed{-6} \qquad \mu_3 = \boxed{2} \qquad v_2 = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad v_3 = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 7 (*2 Punkte*) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix besitzt den Eigenraum $V(\lambda_1) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 2 \\ 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\lambda_1 = \boxed{1+\mathrm{i}}$.

Bestimmen Sie nun den zweiten Eigenwert $\lambda_2 = \boxed{2+\mathrm{i}}$.

Aufgabe 8 (*2 Punkte*)

(a) Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n}$.
Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine obere und untere Schranke für die Folge. Falls eine der beiden Schranken nicht existiert, tragen Sie „existiert nicht" in das entsprechende Kästchen ein.

Untere Schranke: $\boxed{2}$ Obere Schranke: $\boxed{10}$

(b) Geben Sie ein Beispiel für eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche die obere Schranke 3 und die untere Schranke 2 besitzt und streng monoton steigend ist.

$$b_n = \boxed{3 - \frac{1}{n}}$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/3	/4	/3	/9	/7	/2	/2	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Gegeben ist das Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right).$$

Bestimmen Sie die Koordinatentransformationen von $\mathbb{F}$-Koordinaten auf Standardkoordinaten und umgekehrt.

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} : v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}} v + \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}, \quad {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} : v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}} v + \boxed{\begin{pmatrix} 12 \\ -7 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*)

Gegeben sind zwei affine Abbildungen $\alpha, \beta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die in Standardkoordinaten folgende Darstellungen haben:

$$\alpha : v \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta : v \mapsto \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie die Verkettung $\alpha \circ \beta$ der beiden Abbildungen an:

$$\alpha \circ \beta\colon v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}} \; v + \boxed{\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}}$$

(b) Geben Sie die zu α inverse Abbildung α^{-1} an:

$$\alpha^{-1}\colon v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}} \; v + \boxed{\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*)

Stellt die Matrix A eine Drehung um den Ursprung oder eine Spiegelung an einer Ursprungsgeraden dar?

$$A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Determinante der Matrix A:

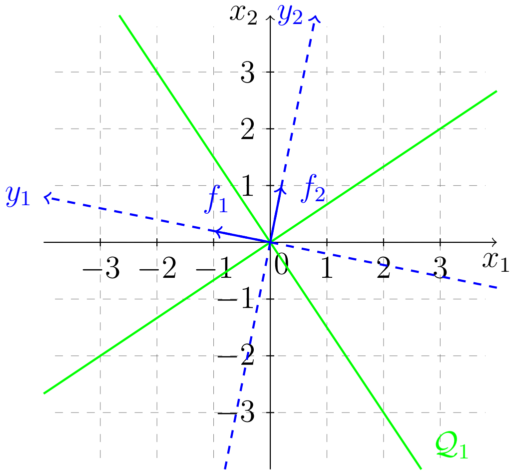
$$\det(A) = \boxed{-1}$$

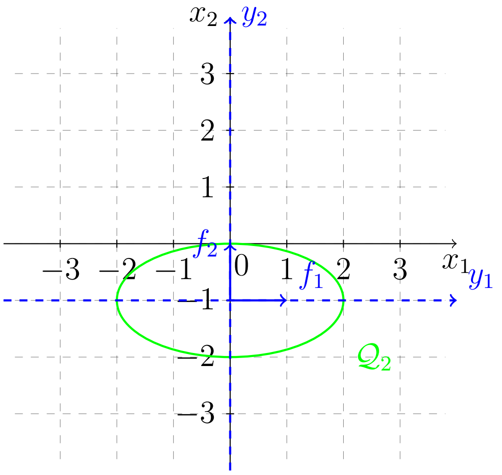
Kreuzen Sie an: A beschreibt eine [X] Spiegelung, [ ] Drehung.

Bestimmen Sie je nachdem den Drehwinkel $\varphi \in (0, 2\pi]$ oder die Gerade g, an der gespiegelt wird:

$$\boxed{g = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

Aufgabe 5 (*9 Punkte*) Bestimmen Sie für die folgenden Quadriken ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$, in dem diese Quadriken euklidische Normalform haben. Geben Sie die Gleichungen der Quadriken in diesem Koordinatensystem an. Skizzieren Sie die neuen Koordinatensysteme samt den Quadriken im Standardkoordinatensystem.

$\mathcal{Q}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -12x_1^2 + 12x_2^2 + 10x_1x_2 = 0 \right\}$	
$\mathbb{F}$	$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$
euklidische Normalform	$y_1^2 - y_2^2 = 0$
Skizze	

$\mathcal{Q}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 + 4x_2^2 + 8x_2 = 0 \right\}$	
$\mathbb{F}$	$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
euklidische Normalform	$-\frac{1}{4}y_1^2 - y_2^2 + 1 = 0$
Skizze	

Aufgabe 6 (*7 Punkte*) Gegeben ist die folgende reelle Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 14 \\ 13 & -2 & 22 \\ -7 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ von A in Abhängigkeit von λ an:

$$\chi_A(\lambda) = \boxed{-\lambda^3 - 5\lambda^2 + 4\lambda + 20 = -(\lambda+2)(\lambda+5)(\lambda-2)}$$

(b) Es ist $v_1 = (0,1,0)^\intercal$ ein Eigenvektor mit Eigenwert μ_1 der Matrix A. Berechnen Sie μ_1:

$$\mu_1 = \boxed{-2}$$

(c) Bestimmen Sie die weiteren Eigenwerte μ_2, μ_3 und zugehörige Eigenvektoren v_2, v_3 von A:

$$\mu_2 = \boxed{-5} \qquad \mu_3 = \boxed{2} \qquad v_2 = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}} \qquad v_3 = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 7 (*2 Punkte*) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i} & 3\mathrm{i} \\ \frac{3}{2}\mathrm{i} & \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix besitzt den Eigenraum $V(\lambda_1) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 2 \\ 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\lambda_1 = \boxed{1+\mathrm{i}}$.

Bestimmen Sie nun den zweiten Eigenwert $\lambda_2 = \boxed{1-2\mathrm{i}}$.

Aufgabe 8 (*2 Punkte*)

(a) Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 4 + \frac{(-1)^n}{n}$.
Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine obere und untere Schranke für die Folge. Falls eine der beiden Schranken nicht existiert, tragen Sie „existiert nicht“ in das entsprechende Kästchen ein.

Untere Schranke: $\boxed{-1}$ Obere Schranke: $\boxed{\frac{9}{2}}$

(b) Geben Sie ein Beispiel für eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche die obere Schranke 3 und die untere Schranke 2 besitzt und streng monoton fallend ist.

$$b_n = \boxed{2 + \frac{1}{n}}$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/3	/4	/3	/9	/7	/2	/2	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Gegeben ist das Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Bestimmen Sie die Koordinatentransformationen von $\mathbb{F}$-Koordinaten auf Standardkoordinaten und umgekehrt.

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} : v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}} \, v + \boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}}, \quad {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} : v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}} \, v + \boxed{\begin{pmatrix} 12 \\ -7 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*)

Gegeben sind zwei affine Abbildungen $\alpha, \beta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die in Standardkoordinaten folgende Darstellungen haben:

$$\alpha : v \mapsto \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta : v \mapsto \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie die Verkettung $\alpha \circ \beta$ der beiden Abbildungen an:

$$\alpha \circ \beta\colon v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}} \; v + \boxed{\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}}$$

(b) Geben Sie die zu α inverse Abbildung α^{-1} an:

$$\alpha^{-1}\colon v \mapsto \boxed{\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}} \; v + \boxed{\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*)

Stellt die Matrix A eine Drehung um den Ursprung oder eine Spiegelung an einer Ursprungsgeraden dar?

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Determinante der Matrix A:

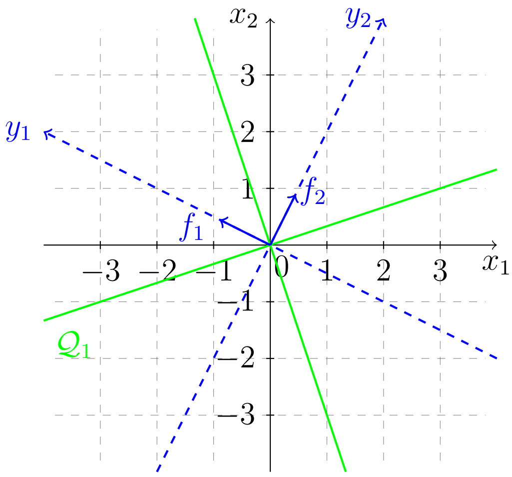
$$\det(A) = \boxed{-1}$$

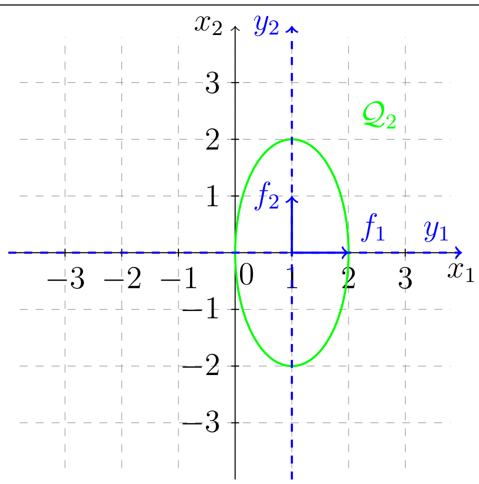
Kreuzen Sie an: A beschreibt eine ☐ Drehung, ☒ Spiegelung.

Bestimmen Sie je nachdem den Drehwinkel $\varphi \in (0, 2\pi]$ oder die Gerade g, an der gespiegelt wird:

$$\boxed{g = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

Aufgabe 5 (*9 Punkte*) Bestimmen Sie für die folgenden Quadriken ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$, in dem diese Quadriken euklidische Normalform haben. Geben Sie die Gleichungen der Quadriken in diesem Koordinatensystem an. Skizzieren Sie die neuen Koordinatensysteme samt den Quadriken im Standardkoordinatensystem.

$\mathcal{Q}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -3x_1^2 + 3x_2^2 + 8x_1x_2 = 0 \right\}$	
$\mathbb{F}$	$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$
euklidische Normalform	$y_1^2 - y_2^2 = 0$
Skizze	

$\mathcal{Q}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 4x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 = 0 \right\}$	
$\mathbb{F}$	$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
euklidische Normalform	$-y_1^2 - \frac{1}{4}y_2^2 + 1 = 0$
Skizze	

Aufgabe 6 (*7 Punkte*) Gegeben ist die folgende reelle Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 0 & -18 \\ 30 & -1 & -40 \\ 9 & 0 & -15 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ von A in Abhängigkeit von λ an:

$$\chi_A(\lambda) = \boxed{-\lambda^3 - 4\lambda^2 + 15\lambda + 18 = -(\lambda+1)(\lambda+6)(\lambda-3)}$$

(b) Es ist $v_1 = (0,1,0)^\mathsf{T}$ ein Eigenvektor mit Eigenwert μ_1 der Matrix A. Berechnen Sie μ_1:

$$\mu_1 = \boxed{-1}$$

(c) Bestimmen Sie die weiteren Eigenwerte μ_2, μ_3 und zugehörige Eigenvektoren v_2, v_3 von A:

$$\mu_2 = \boxed{-6} \qquad \mu_3 = \boxed{3} \qquad v_2 = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad v_3 = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 7 (*2 Punkte*) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i} & 3\mathrm{i} \\ \frac{3}{2}\mathrm{i} & \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix besitzt den Eigenraum $V(\lambda_1) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 2 \\ 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\lambda_1 = \boxed{1+2\mathrm{i}}$.

Bestimmen Sie nun den zweiten Eigenwert $\lambda_2 = \boxed{1-\mathrm{i}}$.

Aufgabe 8 (*2 Punkte*)

(a) Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 3 - \frac{(-1)^n}{n}$.
Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine obere und untere Schranke für die Folge. Falls eine der beiden Schranken nicht existiert, tragen Sie „existiert nicht" in das entsprechende Kästchen ein.

Untere Schranke: $\boxed{\frac{5}{2}}$ Obere Schranke: $\boxed{\frac{25}{2}}$

(b) Geben Sie ein Beispiel für eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche die obere Schranke -2 und die untere Schranke -3 besitzt und streng monoton steigend ist.

$$b_n = \boxed{-2 - \frac{1}{n}}$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/3	/4	/3	/9	/7	/2	/2	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Gegeben ist das Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) .$$

Bestimmen Sie die Koordinatentransformationen von $\mathbb{F}$-Koordinaten auf Standardkoordinaten und umgekehrt.

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} : v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}} \; v + \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}} \;, \quad {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} : v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}} \; v + \boxed{\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*)

Gegeben sind zwei affine Abbildungen $\alpha, \beta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die in Standardkoordinaten folgende Darstellungen haben:

$$\alpha : v \mapsto \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta : v \mapsto \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie die Verkettung $\alpha \circ \beta$ der beiden Abbildungen an:

$$\alpha \circ \beta\colon v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}} \; v + \boxed{\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

(b) Geben Sie die zu α inverse Abbildung α^{-1} an:

$$\alpha^{-1}\colon v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}} \; v + \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*)

Stellt die Matrix A eine Drehung um den Ursprung oder eine Spiegelung an einer Ursprungsgeraden dar?

$$A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Determinante der Matrix A:

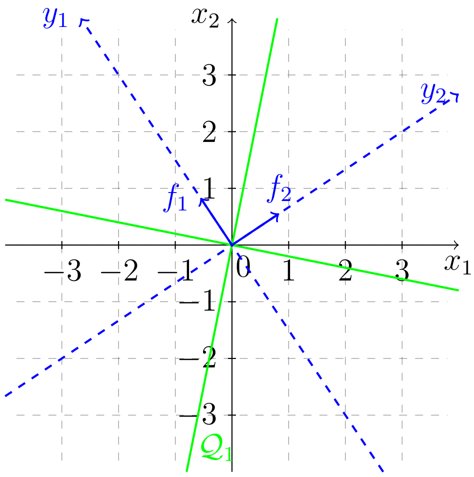
$$\det(A) = \boxed{-1}$$

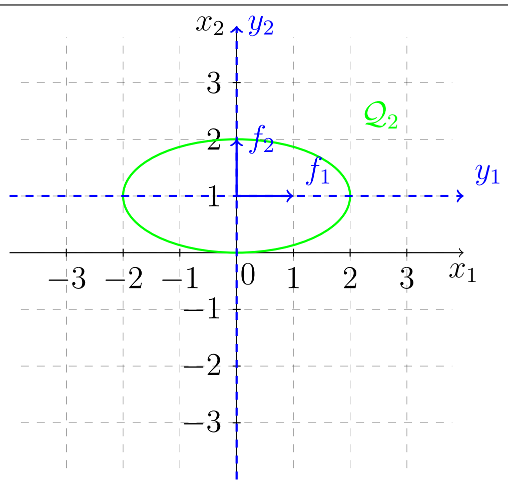
Kreuzen Sie an: A beschreibt eine [X] Spiegelung, [ ] Drehung.

Bestimmen Sie je nachdem den Drehwinkel $\varphi \in (0, 2\pi]$ oder die Gerade g, an der gespiegelt wird:

$$\boxed{g = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

Aufgabe 5 (*9 Punkte*) Bestimmen Sie für die folgenden Quadriken ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$, in dem diese Quadriken euklidische Normalform haben. Geben Sie die Gleichungen der Quadriken in diesem Koordinatensystem an. Skizzieren Sie die neuen Koordinatensysteme samt den Quadriken im Standardkoordinatensystem.

$\mathcal{Q}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -5x_1^2 + 5x_2^2 - 24x_1x_2 = 0 \right\}$	
$\mathbb{F}$	$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$
euklidische Normalform	$y_1^2 - y_2^2 = 0$
Skizze	

$\mathcal{Q}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 + 4x_2^2 - 8x_2 = 0 \right\}$	
$\mathbb{F}$	$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
euklidische Normalform	$-\frac{1}{4}y_1^2 - y_2^2 + 1 = 0$
Skizze	

Aufgabe 6 (*7 Punkte*) Gegeben ist die folgende reelle Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -4 \\ 7 & 4 & -7 \\ 20 & 0 & -11 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ von A in Abhängigkeit von λ an:

$$\chi_A(\lambda) = \boxed{-\lambda^3 + 13\lambda + 12 = -(\lambda - 4)(\lambda + 1)(\lambda + 3)}$$

(b) Es ist $v_1 = (0, 1, 0)^\intercal$ ein Eigenvektor mit Eigenwert μ_1 der Matrix A. Berechnen Sie μ_1:

$$\mu_1 = \boxed{4}$$

(c) Bestimmen Sie die weiteren Eigenwerte μ_2, μ_3 und zugehörige Eigenvektoren v_2, v_3 von A:

$$\mu_2 = \boxed{-1} \qquad \mu_3 = \boxed{-3} \qquad v_2 = \boxed{\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}} \qquad v_3 = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 7 (*2 Punkte*) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i} & \frac{1}{2}\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix besitzt den Eigenraum $V(\lambda_1) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 + \mathrm{i} \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\lambda_1 = \boxed{1 - \mathrm{i}}$.

Bestimmen Sie nun den zweiten Eigenwert $\lambda_2 = \boxed{2 - \mathrm{i}}$.

Aufgabe 8 (*2 Punkte*)

(a) Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 4 - \frac{(-1)^n}{n}$.
Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine obere und untere Schranke für die Folge. Falls eine der beiden Schranken nicht existiert, tragen Sie „existiert nicht“ in das entsprechende Kästchen ein.

Untere Schranke: $\boxed{-2}$ Obere Schranke: $\boxed{5}$

(b) Geben Sie ein Beispiel für eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche die obere Schranke -2 und die untere Schranke -3 besitzt und streng monoton fallend ist.

$$b_n = \boxed{-3 + \frac{1}{n}}$$
