Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/2	/2	/2	/4	/2	/9	/5	/4	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*2 Punkte*) Geben Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der folgenden Gleichung in der Form $z = a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an:

$$(z - 3\mathrm{i})^4 = 1$$

$1 + 3\mathrm{i},\ 4\mathrm{i},\ -1 + 3\mathrm{i},\ 2\mathrm{i}$

Aufgabe 3 (*2 Punkte*) Die lineare Abbildung α habe in Standardkoordinaten die Darstellung

$$\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 \colon v \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} v.$$

Bestimmen Sie: $\dim \operatorname{Kern}(\alpha) = \boxed{1}$, $\dim \operatorname{Bild}(\alpha) = \boxed{2}$.

Aufgabe 4 (*2 Punkte*) Die Matrix A_t ist für $t \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4t \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie das charakteristische Polynom $\chi_{A_t}(\lambda)$ von A_t in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ und λ an.

$$\chi_{A_t}(\lambda) = \boxed{(\lambda - 1)(\lambda - 4t) = \lambda^2 - (4t+1)\lambda + 4t}$$

(b) Für welche Werte $t \in \mathbb{R}$ ist A_t diagonalisierbar?

$$t \in \boxed{\mathbb{R} \setminus \{\tfrac{1}{4}\}}$$

Aufgabe 5 (*4 Punkte*) Sei $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie: $\langle v \,|\, w \rangle = \boxed{6}$

Zerlegen Sie v in einen Vektor v_1 orthogonal zu w und einen Vektor $v_2 \in \mathrm{L}\,(w)$:

$$v_1 = \boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}} \qquad v_2 = \boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Geben Sie einen Vektor $u \neq 0$ an, der senkrecht auf v und w steht: $u = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}$

Aufgabe 6 (*2 Punkte*)

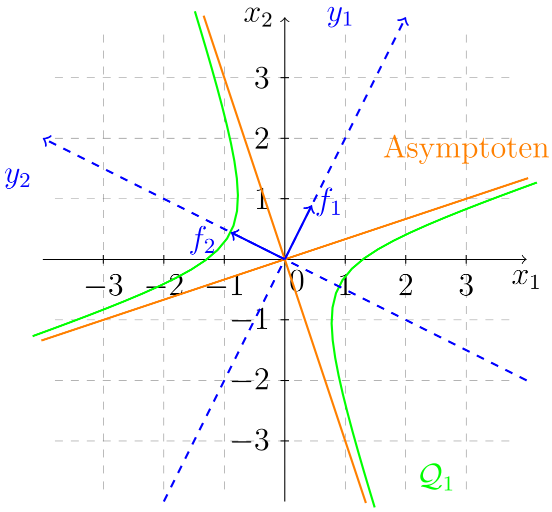
a) Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \cos(\frac{n\pi}{2})$.

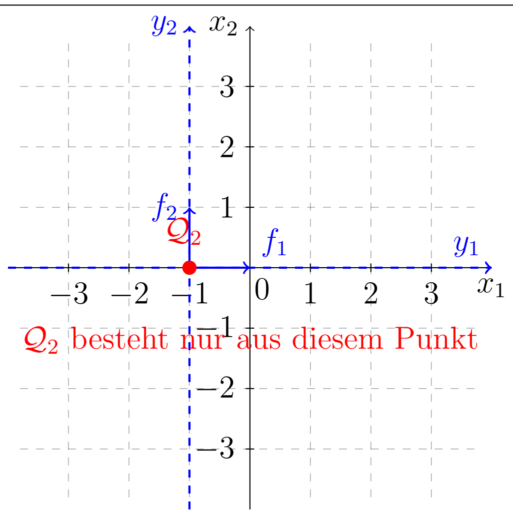
Bestimmen Sie die Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\boxed{-1, 0, 1}$

b) Geben Sie ein Beispiel für eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche unbeschränkt ist und mindestens zwei Häufungspunkte besitzt.

$$b_n = \boxed{(-1)^n n}$$

Aufgabe 7 (*9 Punkte*) Bestimmen Sie für die folgenden Quadriken ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$, in dem diese Quadriken euklidische Normalform haben. Geben Sie die Gleichungen der Quadriken in diesem Koordinatensystem an. Skizzieren Sie die neuen Koordinatensysteme samt den Quadriken im Standardkoordinatensystem.

$\mathcal{Q}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -3x_1^2 + 3x_2^2 + 8x_1x_2 + 5 = 0 \right\}$	
$\mathbb{F}$	$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
euklidische Normalform	$y_1^2 - y_2^2 + 1 = 0$
Skizze	

$\mathcal{Q}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1 + 2 = 0 \right\}$	
$\mathbb{F}$	$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
euklidische Normalform	$y_1^2 + y_2^2 = 0$
Skizze	

Aufgabe 8 (*5 Punkte*) Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

alle Eigenwerte

$$\lambda_1 = \boxed{6}, \quad \lambda_2 = \boxed{4}, \quad \lambda_3 = \boxed{2}$$

und die dazugehörigen Eigenräume

$$V(\lambda_1) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}, \quad V(\lambda_2) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}, \quad V(\lambda_3) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}.$$

Geben Sie eine invertierbare Matrix T und die dazugehörige Diagonalmatrix D so an, dass gilt $D = T^{-1}AT$.

$$T = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \qquad D = \boxed{\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 9 (*4 Punkte*)

Gegeben sind zwei affine Abbildungen $\alpha, \beta \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die in Standardkoordinaten folgende Darstellungen haben:

$$\alpha : v \mapsto \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta : v \mapsto \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie die Verknüpfung $\alpha \circ \beta$ der beiden Abbildungen an:

$$\alpha \circ \beta \colon v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -11 & 6 \end{pmatrix}} \quad v + \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

(b) Geben Sie die zu α inverse Abbildung α^{-1} an:

$$\alpha^{-1} \colon v \mapsto \boxed{\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}} \quad v + \boxed{\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}}$$
