Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/3	/4	/5	/7	/2	/3	/6	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*)

Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: $\boxed{}$ **Gruppennr.:** $\boxed{}$

Aufgabe 2 (*3 Punkte*)

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Ferner gelte:

$$a = 3b, \quad a = 2c, \quad d = b + 6c, \quad |a| = \sqrt{9}.$$

Berechnen Sie

$$\langle b \,|\, b \rangle = \boxed{} \qquad \langle b \,|\, c \rangle = \boxed{} \qquad \langle d \,|\, d \rangle = \boxed{} \,.$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*)

Gegeben seien die Punkte $A, B, C \in \mathbb{R}^3$

$$A = (1, 1, -1), \quad B = \left(-\frac{1}{3}, 1, -2\right), \quad C = (-3, 4, -4).$$

(a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene an, in der A, B und C liegen:

$\boxed{}$.

(b) Geben Sie die Hessesche Normalform der Ebene aus **(a)** an:

$\boxed{}$.

Aufgabe 4 (*5 Punkte*)

Gegeben seien die Matrix A und der Vektor b durch

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -6 \\ -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Inverse von A: $\quad A^{-1} = \boxed{}$.

(b) Bestimmen Sie die Lösung x des linearen Gleichungssystems $Ax = b$: $\quad x = \boxed{}$.

Aufgabe 5 (*7 Punkte*)

Gegeben sei der Vektorraum $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R} := \left\{ \sum_{j=0}^{2} \alpha_j X^j \,\middle|\, \alpha_j \in \mathbb{R} \right\}$ der reellen Polynome vom Grad höchstens 2 mit den Basen $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$ und $\mathcal{C} = \{1, X, \frac{1}{2}(3X^2 - 1)\}$. Weiterhin soll die lineare Abbildung $\varphi\colon \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R} \to \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\varphi(-1) = -4X, \quad \varphi(X-1) = 2X - 4, \quad \varphi\left(\frac{X^2}{2} - 2X\right) = X^2 - X + 1.$$

(a) Bestimmen Sie:

$\varphi(1) = \boxed{}$ $\varphi(X) = \boxed{}$

$\varphi\left(X^2\right) = \boxed{}$ $\varphi\left(\frac{1}{2}(3X^2 - 1)\right) = \boxed{}$

(b) Bestimmen Sie ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}}$ und ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$:

$${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}} = \boxed{} \qquad {}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}} = \boxed{}.$$

(c) Bestimmen Sie das Bild von $p(X) = 3X^2 - 2X - 1$ unter φ:

$$\varphi\left(3X^2 - 2X - 1\right) = \boxed{}.$$

Aufgabe 6 (*2 Punkte*)

(a) Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 2^{-n} + \frac{(-1)^n}{2}$.

Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine obere und untere Schranke für die Folge. Falls eine der beiden Schranken nicht existiert, tragen Sie „existiert nicht“ in das entsprechende Kästchen ein.

Untere Schranke: $\boxed{}$ Obere Schranke: $\boxed{}$

(b) Geben Sie ein Beispiel für eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche die obere Schranke π und die untere Schranke $\pi - 1$ besitzt und streng monoton steigend ist.

$$b_n = \boxed{}$$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*)

Gegeben sei die von $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige reelle Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die Eigenwerte $\lambda_{1,\alpha}$ und $\lambda_{2,\alpha}$ der Matrix A_α in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ an.

$\lambda_{1,\alpha} =$ $\boxed{}$ $\lambda_{2,\alpha} =$ $\boxed{}$

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die quadratische Form $q_{A_\alpha}(x) = x^\mathsf{T} A_\alpha x$ positiv definit?

$\alpha \in$ $\boxed{}$

Aufgabe 8 (*6 Punkte*) Gegeben sei die komplexe Matrix $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 6\mathrm{i} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Ergebnisse in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

(a) Geben Sie die Determinante und die Spur von A an.

$\det(A) =$ $\boxed{}$ $\mathrm{Sp}(A) =$ $\boxed{}$

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{C}$ der Matrix A.

$\lambda_1 =$ $\boxed{}$ $\lambda_2 =$ $\boxed{}$

$\lambda_3 =$ $\boxed{}$ $\lambda_4 =$ $\boxed{}$

Name, Vorname:

Matrikel-Nummer:

Studien-gang:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/3	/4	/5	/7	/2	/3	/6	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*)

Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:

Gruppennr.:

Aufgabe 2 (*3 Punkte*)

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Ferner gelte:

$$a = 3b, \quad a = 2c, \quad d = 9b + 4c, \quad |a| = \sqrt{2}.$$

Berechnen Sie

$$\langle b \,|\, b \rangle = \boxed{} \qquad \langle b \,|\, c \rangle = \boxed{} \qquad \langle d \,|\, d \rangle = \boxed{}\,.$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*)

Gegeben seien die Punkte $A, B, C \in \mathbb{R}^3$

$$A = (-1, 1, 1)\,, \quad B = (0, -1, 1)\,, \quad C = (0, 1, 2)\,.$$

(a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene an, in der A, B und C liegen:

$$\boxed{}\,.$$

(b) Geben Sie die Hessesche Normalform der Ebene aus **(a)** an:

$$\boxed{}\,.$$

Aufgabe 4 (*5 Punkte*)

Gegeben seien die Matrix A und der Vektor b durch

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 20 & -24 \\ 4 & -15 & 18 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Inverse von A: $\quad A^{-1} = \boxed{}\,.$

(b) Bestimmen Sie die Lösung x des linearen Gleichungssystems $Ax = b$: $\quad x = \boxed{}\,.$

Aufgabe 5 (*7 Punkte*)

Gegeben sei der Vektorraum $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R} := \left\{ \sum_{j=0}^{2} \alpha_j X^j \,\middle|\, \alpha_j \in \mathbb{R} \right\}$ der reellen Polynome vom Grad höchstens 2 mit den Basen $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$ und $\mathcal{C} = \{1, X, \frac{1}{2}(3X^2 - 1)\}$. Weiterhin soll die lineare Abbildung $\varphi\colon \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R} \to \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\varphi(-1) = 4X, \quad \varphi(X-1) = 2X - 3, \quad \varphi\left(\frac{X^2}{2} - 2X\right) = 2X^2 - X + 1.$$

(a) Bestimmen Sie:

$\varphi(1) =$ $\boxed{}$ $\qquad$ $\varphi(X) =$ $\boxed{}$

$\varphi\left(X^2\right) =$ $\boxed{}$ $\qquad$ $\varphi\left(\frac{1}{2}(3X^2 - 1)\right) =$ $\boxed{}$

(b) Bestimmen Sie ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}}$ und ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$:

$${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}} = \boxed{} \qquad {}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}} = \boxed{}.$$

(c) Bestimmen Sie das Bild von $p(X) = 3X^2 - 2X - 1$ unter φ:

$$\varphi\left(3X^2 - 2X - 1\right) = \boxed{}.$$

Aufgabe 6 (*2 Punkte*)

(a) Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 3^{-n} + \frac{(-1)^n}{3}$.

Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine obere und untere Schranke für die Folge. Falls eine der beiden Schranken nicht existiert, tragen Sie „existiert nicht" in das entsprechende Kästchen ein.

Untere Schranke: $\boxed{}$ $\qquad$ Obere Schranke: $\boxed{}$

(b) Geben Sie ein Beispiel für eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche die obere Schranke $\pi + 1$ und die untere Schranke π besitzt und streng monoton fallend ist.

$$b_n = \boxed{}$$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*)

Gegeben sei die von $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige reelle Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 3 & \alpha \\ \alpha & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die Eigenwerte $\lambda_{1,\alpha}$ und $\lambda_{2,\alpha}$ der Matrix A_α in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ an.

$\lambda_{1,\alpha} = \boxed{}$ $\lambda_{2,\alpha} = \boxed{}$

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die quadratische Form $q_{A_\alpha}(x) = x^\mathsf{T} A_\alpha x$ positiv definit?

$\alpha \in \boxed{}$

Aufgabe 8 (*6 Punkte*) Gegeben sei die komplexe Matrix $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3\mathrm{i} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Ergebnisse in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

(a) Geben Sie die Determinante und die Spur von A an.

$\det(A) = \boxed{}$ $\mathrm{Sp}(A) = \boxed{}$

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{C}$ der Matrix A.

$\lambda_1 = \boxed{}$ $\lambda_2 = \boxed{}$

$\lambda_3 = \boxed{}$ $\lambda_4 = \boxed{}$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/3	/4	/5	/7	/2	/3	/6	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*)

Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:		**Gruppennr.:**	

Aufgabe 2 (*3 Punkte*)

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Ferner gelte:

$$a = 3b, \quad a = 2c, \quad d = 3b + 2c, \quad |a| = \sqrt{5}.$$

Berechnen Sie

$$\langle b \,|\, b \rangle = \boxed{} \qquad \langle b \,|\, c \rangle = \boxed{} \qquad \langle d \,|\, d \rangle = \boxed{} \;.$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*)

Gegeben seien die Punkte $A, B, C \in \mathbb{R}^3$

$$A = (-1, -1, 1)\,, \quad B = (-1, 3, -2)\,, \quad C = (-2, -5, 4)\,.$$

(a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene an, in der A, B und C liegen:

$$\boxed{\phantom{\hspace{20em}}}\,.$$

(b) Geben Sie die Hessesche Normalform der Ebene aus **(a)** an:

$$\boxed{\phantom{\hspace{15em}}}\,.$$

Aufgabe 4 (*5 Punkte*)

Gegeben seien die Matrix A und der Vektor b durch

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Inverse von A: $\quad A^{-1} = \boxed{\phantom{\hspace{6em}}}\,.$

(b) Bestimmen Sie die Lösung x des linearen Gleichungssystems $Ax = b$: $\quad x = \boxed{\phantom{\hspace{4em}}}\,.$

Aufgabe 5 (*7 Punkte*)

Gegeben sei der Vektorraum $\mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R} := \left\{\sum_{j=0}^{2} \alpha_j X^j \,\middle|\, \alpha_j \in \mathbb{R}\right\}$ der reellen Polynome vom Grad höchstens 2 mit den Basen $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$ und $\mathcal{C} = \{1, X, \frac{1}{2}(3X^2 - 1)\}$. Weiterhin soll die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R} \to \mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}$ die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\varphi(-1) = -6X, \quad \varphi(X-1) = 2X - 2, \quad \varphi\left(\frac{X^2}{2} - 2X\right) = 4X^2 - X + 1.$$

(a) Bestimmen Sie:

$\varphi(1) = \boxed{}$ $\qquad$ $\varphi(X) = \boxed{}$

$\varphi\left(X^2\right) = \boxed{}$ $\qquad$ $\varphi\left(\frac{1}{2}(3X^2 - 1)\right) = \boxed{}$

(b) Bestimmen Sie ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}}$ und ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$:

$${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}} = \boxed{} \qquad {}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}} = \boxed{}.$$

(c) Bestimmen Sie das Bild von $p(X) = 3X^2 - 2X - 1$ unter φ:

$$\varphi\left(3X^2 - 2X - 1\right) = \boxed{}.$$

Aufgabe 6 (*2 Punkte*)

(a) Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 4^{-n} + \frac{(-1)^n}{4}$.

Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine obere und untere Schranke für die Folge. Falls eine der beiden Schranken nicht existiert, tragen Sie „existiert nicht“ in das entsprechende Kästchen ein.

Untere Schranke: $\boxed{}$ $\qquad$ Obere Schranke: $\boxed{}$

(b) Geben Sie ein Beispiel für eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche die obere Schranke $-\pi$ und die untere Schranke $-(\pi + 1)$ besitzt und streng monoton steigend ist.

$$b_n = \boxed{}$$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*)

Gegeben sei die von $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige reelle Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 4 & \alpha \\ \alpha & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die Eigenwerte $\lambda_{1,\alpha}$ und $\lambda_{2,\alpha}$ der Matrix A_α in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ an.

$\lambda_{1,\alpha} =$ $\qquad$ $\lambda_{2,\alpha} =$

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die quadratische Form $q_{A_\alpha}(x) = x^\mathsf{T} A_\alpha x$ positiv definit?

$\alpha \in$

Aufgabe 8 (*6 Punkte*) Gegeben sei die komplexe Matrix $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4\mathrm{i} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Ergebnisse in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

(a) Geben Sie die Determinante und die Spur von A an.

$\det(A) =$ $\qquad$ $\mathrm{Sp}(A) =$

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{C}$ der Matrix A.

$\lambda_1 =$ $\qquad$ $\lambda_2 =$

$\lambda_3 =$ $\qquad$ $\lambda_4 =$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/3	/4	/5	/7	/2	/3	/6	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*)

Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: $\boxed{}$ **Gruppennr.:** $\boxed{}$

Aufgabe 2 (*3 Punkte*)

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Ferner gelte:

$$a = 3b, \quad a = 2c, \quad d = 6b + c, \quad |a| = \sqrt{4}.$$

Berechnen Sie

$$\langle b \,|\, b \rangle = \boxed{} \qquad \langle b \,|\, c \rangle = \boxed{} \qquad \langle d \,|\, d \rangle = \boxed{}\ .$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*)

Gegeben seien die Punkte $A, B, C \in \mathbb{R}^3$

$$A = (1, -1, 1)\,, \quad B = (0, 2, 1)\,, \quad C = (2, -1, 3)\,.$$

(a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene an, in der A, B und C liegen:

$$\boxed{}\,.$$

(b) Geben Sie die Hessesche Normalform der Ebene aus **(a)** an:

$$\boxed{}\,.$$

Aufgabe 4 (*5 Punkte*)

Gegeben seien die Matrix A und der Vektor b durch

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Inverse von A: $\quad A^{-1} = \boxed{}\,.$

(b) Bestimmen Sie die Lösung x des linearen Gleichungssystems $Ax = b$: $\quad x = \boxed{}\,.$

Aufgabe 5 (*7 Punkte*)

Gegeben sei der Vektorraum $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R} := \left\{ \sum_{j=0}^{2} \alpha_j X^j \,\middle|\, \alpha_j \in \mathbb{R} \right\}$ der reellen Polynome vom Grad höchstens 2 mit den Basen $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$ und $\mathcal{C} = \{1, X, \frac{1}{2}(3X^2 - 1)\}$. Weiterhin soll die lineare Abbildung $\varphi\colon \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R} \to \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\varphi(-1) = 6X, \quad \varphi(X-1) = 2X - 1, \quad \varphi\left(\frac{X^2}{2} - 2X\right) = 6X^2 - X + 1.$$

(a) Bestimmen Sie:

$\varphi(1) = \boxed{}$ $\varphi(X) = \boxed{}$

$\varphi(X^2) = \boxed{}$ $\varphi\left(\frac{1}{2}(3X^2 - 1)\right) = \boxed{}$

(b) Bestimmen Sie ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}}$ und ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$:

$${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}} = \boxed{} \qquad {}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}} = \boxed{}.$$

(c) Bestimmen Sie das Bild von $p(X) = 3X^2 - 2X - 1$ unter φ:

$$\varphi(3X^2 - 2X - 1) = \boxed{}.$$

Aufgabe 6 (*2 Punkte*)

(a) Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 5^{-n} + \frac{(-1)^n}{5}$.

Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine obere und untere Schranke für die Folge. Falls eine der beiden Schranken nicht existiert, tragen Sie „existiert nicht“ in das entsprechende Kästchen ein.

Untere Schranke: $\boxed{}$ Obere Schranke: $\boxed{}$

(b) Geben Sie ein Beispiel für eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche die obere Schranke $-\pi$ und die untere Schranke $-(\pi + 1)$ besitzt und streng monoton fallend ist.

$$b_n = \boxed{}$$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*)

Gegeben sei die von $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige reelle Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 5 & \alpha \\ \alpha & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die Eigenwerte $\lambda_{1,\alpha}$ und $\lambda_{2,\alpha}$ der Matrix A_α in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ an.

$\lambda_{1,\alpha} = \boxed{}$ $\lambda_{2,\alpha} = \boxed{}$

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die quadratische Form $q_{A_\alpha}(x) = x^\mathsf{T} A_\alpha x$ positiv definit?

$\alpha \in \boxed{}$

Aufgabe 8 (*6 Punkte*) Gegeben sei die komplexe Matrix $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 5\mathrm{i} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Ergebnisse in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

(a) Geben Sie die Determinante und die Spur von A an.

$\det(A) = \boxed{}$ $\mathrm{Sp}(A) = \boxed{}$

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{C}$ der Matrix A.

$\lambda_1 = \boxed{}$ $\lambda_2 = \boxed{}$

$\lambda_3 = \boxed{}$ $\lambda_4 = \boxed{}$
