Name, Vorname:		Matrikel-Nummer:		Studien-gang:	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/3	/6	/5	/2	/5	/6	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:		Gruppennr.:	

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{(z-4)^k}{3^k}$	$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5+(-1)^k}{5}\right)^k (z+1+2\mathrm{i})^k$	$\sum\limits_{k=0}^{\infty} (3+4\mathrm{i})^k \left(\frac{1}{2}z - 2\mathrm{i}\right)^k$
z_0	4	$-1-2\mathrm{i}$	$4\mathrm{i}$
ρ	3	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{5}$

Aufgabe 3 (*6 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$\int \frac{\cos x}{(\sin x)^2} \,\mathrm{d}\, x$	$\left[-\frac{1}{\sin x}\right]$
$\int \frac{\sin(x)\cos(x)}{1+(\cos(x))^2} \,\mathrm{d}\, x$	$\left[-\frac{1}{2}\ln\left(1+(\cos x)^2\right)\right]$
$\int \frac{x}{\sqrt{x-1}} \,\mathrm{d}\, x$	$\left[2\,x\sqrt{x-1} - \frac{4}{3}(\sqrt{x-1})^3\right]$

Aufgabe 4 (*5 Punkte*) Führen Sie eine Polynomdivision und eine Partialbruchzerlegung durch:

$$\frac{x^6 - 14x^4 + 4x^3 - 32x^2 - 64x + 1}{x^2 - 16} = \boxed{x^4 + 2x^2 + 4x + \frac{1}{8(x-4)} - \frac{1}{8(x+4)}}$$

Berechnen Sie das unbestimmte Integral:

$$\int \frac{x^6 - 14x^4 + 4x^3 - 32x^2 - 64x + 1}{x^2 - 16} \,\mathrm{d}\, x = \boxed{\left[\tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{2}{3}x^3 + 2x^2 + \tfrac{1}{8}\ln|x-4| - \tfrac{1}{8}\ln|x+4|\right]}$$

Aufgabe 5 (*2 Punkte*) Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 2(x-1)^3 + 11\,.$$

Berechnen Sie für die Stelle $x_0 = 1$

$$|f(x) - f(x_0)| = \boxed{2|x-1|^3}$$

Bestimmen Sie für die Stelle $x_0 = 1$ und jede Zahl $\varepsilon > 0$ eine positive Zahl $\delta_\varepsilon > 0$ so, dass gilt:

$$f\left(U_{\delta_\varepsilon}(1)\right) \subseteqq U_\varepsilon(f(1))$$

$$\delta_\varepsilon = \boxed{\sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{2}}}$$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \frac{1}{4}y(x^2-16) - x^2\,.$$

Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

$$\left(\operatorname{grad} f(x,y)\right)^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} \boxed{\tfrac{1}{2}xy - 2x} & \boxed{\tfrac{1}{4}(x^2-16)} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{H}f\,(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{\tfrac{1}{2}y - 2} & \boxed{\tfrac{1}{2}x} \\ \boxed{\tfrac{1}{2}x} & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

Geben Sie alle kritischen Stellen mit ihrem Typ an.

kritische Stelle	Typ
$(-4,4)$	hier liegt ein Sattelpunkt vor
$(4,4)$	hier liegt ein Sattelpunkt vor

Bestimmen Sie das Taylor-Polynom der Stufe 2 zum Entwicklungspunkt $(1,1)$:

$$T_2(f,(x,y),(1,1)) = \boxed{-\tfrac{19}{4} - \tfrac{3}{2}(x-1) - \tfrac{15}{4}(y-1) - \tfrac{3}{4}(x-1)^2 + \tfrac{1}{2}(x-1)(y-1)}$$

Aufgabe 7 (*6 Punkte*) Berechnen Sie die Rotation des Vektorfeldes

$$f_\alpha \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x(y-1)(z^2+\alpha^2) \\ (x^2+2)(z^2+1) \\ 2(x^2+2)(y-1)z \end{pmatrix},$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist.

$$\operatorname{rot} f_\alpha(x,y,z) = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2x(1-\alpha^2) \end{pmatrix}}$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt f_α ein Potential?

$$\boxed{\alpha \in \{-1, 1\}}$$

Bestimmen Sie für diese α ein Potential U von f_α .

$$U(x,y,z) = \boxed{(x^2+2)(y-1)(z^2+1)}$$

Aufgabe 8 (*3 Punkte*) Gegeben ist

$$f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1(2x_2+3)(x_3-1) \\ (x_1^2+2)(x_3-1)(x_2^2+1) \\ (x_1^2+2)x_2^2 \end{pmatrix}$$

und eine Parametrisierung

$$C \colon [0,1] \to \mathbb{R}^3 \colon t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

der Kurve K .

Berechnen Sie

$$f\big(C(t)\big) = \boxed{\begin{pmatrix} 6t(t-1) \\ (t^2+2)(t-1) \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad C'(t) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

sowie das Kurvenintegral

$$\int_K f(x) \bullet \mathrm{d}\,x = \boxed{-1}$$
