Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studien-gang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/3	/3	/3	/3	/5	/6	/4	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\left(\cos(x)\right)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte. Falls ein Grenzwert nicht existiert, tragen Sie „divergent“ ein.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{3x^2-3x} = \boxed{1} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x)-1}{6x^2} = \boxed{-\frac{3}{4}}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{9x^2+24x+5}-3x\right) = \boxed{4}$$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie, falls existent, die Summen der folgenden Reihen. Falls eine Reihe nicht konvergiert, tragen Sie „divergent“ ein.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6\mathrm{i}}\right)^{n+1} = \boxed{-\frac{1}{37}(1+6\mathrm{i})}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \boxed{\frac{1}{\mathrm{e}}}$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+7)^k}{9^k}$	$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{5+(-1)^k}{9}\right)^k (z-4\mathrm{i})^k$
z_0	-7	$4\mathrm{i}$
ρ	9	$\frac{3}{2}$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$\int x\cos(4x)\,\mathrm{d}x$	$\left[\frac{1}{4}x\sin(4x)+\frac{1}{16}\cos(4x)\right]$
$\int_0^{\pi/4} x\cos(4x)\,\mathrm{d}x$	$-\frac{1}{8}$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*)

In der Partialbruchzerlegung

$$\frac{7x^2-4x+5}{(x-1)(2x^2+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{2x^2+2}$$

gilt

$$A = \boxed{2}\ ,\quad B = \boxed{3}\ ,\quad C = \boxed{-1}\ .$$

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int \frac{x}{2x^2+2}\,\mathrm{d}x = \boxed{\left[\frac{1}{4}\ln|x^2+1|\right]} \qquad \int \frac{1}{2x^2+2}\,\mathrm{d}x = \boxed{\left[\frac{1}{2}\arctan(x)\right]}$$

$$\int \frac{7x^2-4x+5}{(x-1)(2x^2+2)}\,\mathrm{d}x = \boxed{\left[2\ln|x-1| + \frac{3}{4}\ln|x^2+1| - \frac{1}{2}\arctan(x)\right]}$$

Aufgabe 7 (*6 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto 32x^2 - 4x^2y + y^2\,.$$

Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{64x-8xy} & \boxed{-4x^2+2y} \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$$

$$\mathrm{H}f\,(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{64-8y} & \boxed{-8x} \\ \boxed{-8x} & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

Geben Sie alle kritischen Stellen von f mit ihrem Typ an.

kritische Stelle	Typ
$(0,0)$	hier liegt ein lokales Minimum vor
$(2,8)$	hier liegt ein Sattelpunkt vor
$(-2,8)$	hier liegt ein Sattelpunkt vor

Bestimmen Sie das Taylorpolynom von f der Stufe 2 zum Entwicklungspunkt $(1,2)$:

$$T_2(f,(x,y),(1,2)) = \boxed{28 + 48(x-1) + 24(x-1)^2 - 8(x-1)(y-2) + (y-2)^2}$$

Aufgabe 8 (*4 Punkte*) Gegeben sind die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto 20y - 5x,$$

sowie die Menge $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\}$ mit $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^2 + 4y^2 - 1$.
Gesucht sind die Extrema der Funktion f auf der Menge M.
Stellen Sie dazu das Gleichungssystem nach Lagrange auf:

$$\boxed{\begin{aligned} -5 + 2\lambda x &= 0 \\ 20 + 8\lambda y &= 0 \\ x^2 + 4y^2 - 1 &= 0 \end{aligned}}$$

Bestimmen Sie die Stellen, in denen die Funktion f den maximalen und minimalen Wert auf M annimmt, sowie die Werte von f in diesen Stellen:

Typ	Stelle	Funktionswert
Maximum	$\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$	$5\sqrt{5}$
Minimum	$\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$	$-5\sqrt{5}$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Sei V das vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Vektorfeld

$$V\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 6x\mathrm{e}^y \\ 3x^2\mathrm{e}^y + 8y\sin(z) \\ \alpha^2 y^2 \cos(z) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Rotation von V:

$$\operatorname{rot} V(x,y,z) = \left(\boxed{2(\alpha^2 - 4)y\cos(z)} \quad \boxed{0} \quad \boxed{0} \right)^{\mathsf{T}}$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ hat V ein Potential?

$$\boxed{\alpha \in \{-2, +2\}}$$

Bestimmen Sie für $\alpha = 2$ ein Potential U für das Vektorfeld V:

$$U(x,y,z) = \boxed{3x^2\mathrm{e}^y + 4y^2\sin(z)}$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/3	/3	/3	/3	/5	/6	/4	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:		**Gruppennr.:**	

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte. Falls ein Grenzwert nicht existiert, tragen Sie „divergent" ein.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+4x-12}{2x^2-4x} = \boxed{2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(4x)}{6x^2} = \boxed{\frac{4}{3}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+10x+8}-x\right) = \boxed{5}$$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie, falls existent, die Summen der folgenden Reihen. Falls eine Reihe nicht konvergiert, tragen Sie „divergent" ein.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5\mathrm{i}}\right)^{n+1} = \boxed{-\frac{1}{26}(1+5\mathrm{i})}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} = \boxed{\frac{1}{\mathrm{e}^2}}$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4+(-1)^k}{8}\right)^k (z-3\mathrm{i})^k$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+6)^k}{12^k}$
z_0	$3\mathrm{i}$	-6
ρ	$\frac{8}{5}$	12

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$\int x\sin(3x)\,\mathrm{d}x$	$\left[-\frac{1}{3}x\cos(3x)+\frac{1}{9}\sin(3x)\right]$
$\int_0^{\pi/3} x\sin(3x)\,\mathrm{d}x$	$\frac{\pi}{9}$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*)

In der Partialbruchzerlegung

$$\frac{10x^2-7x+14}{(x-2)(4x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{4x^2+4}$$

gilt

$$A = \boxed{2}\ ,\quad B = \boxed{2}\ ,\quad C = \boxed{-3}\ .$$

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int \frac{x}{4x^2+4}\,\mathrm{d}x = \boxed{\left[\frac{1}{8}\ln|x^2+1|\right]} \qquad \int \frac{1}{4x^2+4}\,\mathrm{d}x = \boxed{\left[\frac{1}{4}\arctan(x)\right]}$$

$$\int \frac{10x^2-7x+14}{(x-2)(4x^2+4)}\,\mathrm{d}x = \boxed{\left[2\ln|x-2| + \frac{1}{4}\ln|x^2+1| - \frac{3}{4}\arctan(x)\right]}$$

Aufgabe 7 (*6 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto 4x^2y - 32x^2 - y^2\,.$$

Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(\boxed{8xy-64x}\quad \boxed{4x^2-2y}\right)^\mathsf{T}$$

$$\mathrm{H}f\,(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{8y-64} & \boxed{8x} \\ \boxed{8x} & \boxed{-2} \end{pmatrix}$$

Geben Sie alle kritischen Stellen von f mit ihrem Typ an.

kritische Stelle	Typ
$(0,0)$	hier liegt ein lokales Maximum vor
$(2,8)$	hier liegt ein Sattelpunkt vor
$(-2,8)$	hier liegt ein Sattelpunkt vor

Bestimmen Sie das Taylorpolynom von f der Stufe 2 zum Entwicklungspunkt $(1,2)$:

$$T_2(f,(x,y),(1,2)) = \boxed{-28 - 48(x-1) - 24(x-1)^2 + 8(x-1)(y-2) - (y-2)^2}$$

Aufgabe 8 (*4 Punkte*) Gegeben sind die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto 3x - 12y,$$

sowie die Menge $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\}$ mit $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^2 + 8y^2 - 1$.
Gesucht sind die Extrema der Funktion f auf der Menge M.
Stellen Sie dazu das Gleichungssystem nach Lagrange auf:

$$\boxed{\begin{aligned} 3 + 2\lambda x &= 0 \\ -12 + 16\lambda y &= 0 \\ x^2 + 8y^2 - 1 &= 0 \end{aligned}}$$

Bestimmen Sie die Stellen, in denen die Funktion f den maximalen und minimalen Wert auf M annimmt, sowie die Werte von f in diesen Stellen:

Typ	Stelle	Funktionswert
Maximum	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$	$3\sqrt{3}$
Minimum	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$	$-3\sqrt{3}$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Sei V das vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Vektorfeld

$$V\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2\alpha^2 x \mathrm{e}^y \\ 25x^2\mathrm{e}^y + 2y\sin(z) \\ y^2\cos(z) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Rotation von V:

$$\operatorname{rot} V(x,y,z) = \left(\boxed{0} \quad \boxed{0} \quad \boxed{2(25-\alpha^2)x\mathrm{e}^y} \right)^{\mathsf{T}}$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ hat V ein Potential?

$$\boxed{\alpha \in \{-5, +5\}}$$

Bestimmen Sie für $\alpha = 5$ ein Potential U für das Vektorfeld V:

$$U(x,y,z) = \boxed{25x^2\mathrm{e}^y + y^2\sin(z)}$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/3	/3	/3	/3	/5	/6	/4	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:		**Gruppennr.:**	

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte. Falls ein Grenzwert nicht existiert, tragen Sie „divergent" ein.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+4x-5}{x^2-1} = \boxed{3} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(5x)-1}{10x^2} = \boxed{-\frac{5}{4}}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{4x^2+12x+3}-2x\right) = \boxed{3}$$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie, falls existent, die Summen der folgenden Reihen. Falls eine Reihe nicht konvergiert, tragen Sie „divergent" ein.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4\mathrm{i}}\right)^{n+1} = \boxed{-\frac{1}{17}(1+4\mathrm{i})}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{n!} = \boxed{3\mathrm{e}}$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-2\mathrm{i})^k}{8^k}$	$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{6+(-1)^k}{12}\right)^k (z+3)^k$
z_0	$2\mathrm{i}$	-3
ρ	8	$\frac{12}{7}$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$\int x\cos(3x)\,\mathrm{d}x$	$\left[\frac{1}{3}x\sin(3x)+\frac{1}{9}\cos(3x)\right]$
$\int_0^{\pi/3} x\cos(3x)\,\mathrm{d}x$	$-\frac{2}{9}$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*)

In der Partialbruchzerlegung

$$\frac{12x^2-2x+16}{(x+1)(5x^2+5)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{5x^2+5}$$

gilt

$$A = \boxed{3}\ , \quad B = \boxed{-3}\ , \quad C = \boxed{1}\ .$$

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int \frac{x}{5x^2+5}\,\mathrm{d}x = \boxed{\left[\frac{1}{10}\ln|x^2+1|\right]} \qquad \int \frac{1}{5x^2+5}\,\mathrm{d}x = \boxed{\left[\frac{1}{5}\arctan(x)\right]}$$

$$\int \frac{12x^2-2x+16}{(x+1)(5x^2+5)}\,\mathrm{d}x = \boxed{\left[3\ln|x+1| - \frac{3}{10}\ln|x^2+1| + \frac{1}{5}\arctan(x)\right]}$$

Aufgabe 7 (*6 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto 36x^2 - 12x^2y + 2y^2\,.$$

Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{72x-24xy} & \boxed{-12x^2+4y} \end{pmatrix}^\intercal$$

$$\mathrm{H}f\,(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{72-24y} & \boxed{-24x} \\ \boxed{-24x} & \boxed{4} \end{pmatrix}$$

Geben Sie alle kritischen Stellen von f mit ihrem Typ an.

kritische Stelle	Typ
$(0,0)$	hier liegt ein lokales Minimum vor
$(1,3)$	hier liegt ein Sattelpunkt vor
$(-1,3)$	hier liegt ein Sattelpunkt vor

Bestimmen Sie das Taylorpolynom von f der Stufe 2 zum Entwicklungspunkt $(1,2)$:

$$T_2(f,(x,y),(1,2)) = \boxed{20 + 24(x-1) - 4(y-2) + 12(x-1)^2 - 24(x-1)(y-2) + 2(y-2)^2}$$

Aufgabe 8 (*4 Punkte*) Gegeben sind die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto 3x - 6y,$$

sowie die Menge $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\}$ mit $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^2 + 4y^2 - 1$.
Gesucht sind die Extrema der Funktion f auf der Menge M.
Stellen Sie dazu das Gleichungssystem nach Lagrange auf:

$$\boxed{\begin{aligned} 3 + 2\lambda x &= 0 \\ -6 + 8\lambda y &= 0 \\ x^2 + 4y^2 - 1 &= 0 \end{aligned}}$$

Bestimmen Sie die Stellen, in denen die Funktion f den maximalen und minimalen Wert auf M annimmt, sowie die Werte von f in diesen Stellen:

Typ	Stelle	Funktionswert
Maximum	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$	$3\sqrt{2}$
Minimum	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$	$-3\sqrt{2}$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Sei V das vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Vektorfeld

$$V\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4x\mathrm{e}^y \\ 2x^2\mathrm{e}^y + 2\alpha^2 y \sin(z) \\ 9y^2\cos(z) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Rotation von V:

$$\operatorname{rot} V(x,y,z) = \left(\boxed{2(9-\alpha^2)y\cos(z)} \quad \boxed{0} \quad \boxed{0} \right)^{\mathsf{T}}$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ hat V ein Potential?

$$\boxed{\alpha \in \{-3, +3\}}$$

Bestimmen Sie für $\alpha = 3$ ein Potential U für das Vektorfeld V:

$$U(x,y,z) = \boxed{2x^2\mathrm{e}^y + 9y^2\sin(z)}$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/3	/3	/3	/3	/5	/6	/4	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:		**Gruppennr.:**	

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte. Falls ein Grenzwert nicht existiert, tragen Sie „divergent" ein.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+6x-16}{x^2-2x} = \boxed{5} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(6x)}{12x^2} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+4x+7}-x\right) = \boxed{2}$$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie, falls existent, die Summen der folgenden Reihen. Falls eine Reihe nicht konvergiert, tragen Sie „divergent" ein.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3\mathrm{i}}\right)^{n+1} = \boxed{-\frac{1}{10}(1+3\mathrm{i})}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n!} = \boxed{2\mathrm{e}}$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2+(-1)^k}{6}\right)^k (z+4)^k$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-8\mathrm{i})^k}{3^k}$
z_0	-4	$8\mathrm{i}$
ρ	2	3

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$\int x\sin(4x)\,\mathrm{d}x$	$\left[-\frac{1}{4}x\cos(4x)+\frac{1}{16}\sin(4x)\right]$
$\int_0^{\pi/4} x\sin(4x)\,\mathrm{d}x$	$\frac{\pi}{16}$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*)

In der Partialbruchzerlegung

$$\frac{8x^2+2x+17}{(x+2)(3x^2+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{3x^2+3}$$

gilt

$$A = \boxed{3}\ , \quad B = \boxed{-1}\ , \quad C = \boxed{4}\ .$$

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int \frac{x}{3x^2+3}\,\mathrm{d}x = \boxed{\left[\frac{1}{6}\ln|x^2+1|\right]} \qquad \int \frac{1}{3x^2+3}\,\mathrm{d}x = \boxed{\left[\frac{1}{3}\arctan(x)\right]}$$

$$\int \frac{8x^2+2x+17}{(x+2)(3x^2+3)}\,\mathrm{d}x = \boxed{\left[3\ln|x+2| - \frac{1}{6}\ln|x^2+1| + \frac{4}{3}\arctan(x)\right]}$$

Aufgabe 7 (*6 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto 12x^2y - 36x^2 - 2y^2\,.$$

Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{24xy - 72x} & \boxed{12x^2 - 4y} \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$$

$$\mathrm{H}f\,(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{24y - 72} & \boxed{24x} \\ \boxed{24x} & \boxed{-4} \end{pmatrix}$$

Geben Sie alle kritischen Stellen von f mit ihrem Typ an.

kritische Stelle	Typ
$(0,0)$	hier liegt ein lokales Maximum vor
$(1,3)$	hier liegt ein Sattelpunkt vor
$(-1,3)$	hier liegt ein Sattelpunkt vor

Bestimmen Sie das Taylorpolynom von f der Stufe 2 zum Entwicklungspunkt $(1,2)$:

$$T_2(f,(x,y),(1,2)) = \boxed{-20 - 24(x-1) + 4(y-2) - 12(x-1)^2 + 24(x-1)(y-2) - 2(y-2)^2}$$

Aufgabe 8 (*4 Punkte*) Gegeben sind die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto 12y - 4x,$$

sowie die Menge $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\}$ mit $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^2 + 9y^2 - 1$.
Gesucht sind die Extrema der Funktion f auf der Menge M.
Stellen Sie dazu das Gleichungssystem nach Lagrange auf:

$$\begin{aligned} -4 + 2\lambda x &= 0 \\ 12 + 18\lambda y &= 0 \\ x^2 + 9y^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Stellen, in denen die Funktion f den maximalen und minimalen Wert auf M annimmt, sowie die Werte von f in diesen Stellen:

Typ	Stelle	Funktionswert
Maximum	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{6}\right)$	$4\sqrt{2}$
Minimum	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$	$-4\sqrt{2}$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Sei V das vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Vektorfeld

$$V\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 32x\mathrm{e}^y \\ \alpha^2 x^2 \mathrm{e}^y + 4y\sin(z) \\ 2y^2\cos(z) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Rotation von V:

$$\operatorname{rot} V(x,y,z) = \left(\boxed{0} \quad \boxed{0} \quad \boxed{2(\alpha^2 - 16)x\mathrm{e}^y} \right)^{\mathsf{T}}$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ hat V ein Potential?

$$\boxed{\alpha \in \{-4, +4\}}$$

Bestimmen Sie für $\alpha = 4$ ein Potential U für das Vektorfeld V:

$$U(x,y,z) = \boxed{16x^2\mathrm{e}^y + 2y^2\sin(z)}$$