Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studiengang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/6	/4	/4	/3	/5	/3	/5	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Aufgabe 1 (*1 Punkt*)

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*6 Punkte*)

Die Ebene E wird aufgespannt durch die Punkte $P_1 = (2,3,4)$, $P_2 = (6,4,7)$ und $P_3 = (10,6,10)$.

(a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E:

$$E = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}} \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{matrix}} \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 8 \\ 3 \\ 6 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene E, also eine Gleichung der Form $\langle n | x \rangle = d$ mit normiertem Normalenvektor

$$n = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -\frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{matrix}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad d = \boxed{2}\,.$$

(c) Berechnen Sie den Abstand des Punktes $Q = (4,-1,8)$ von der Ebene E: $\boxed{2}$.

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Gegeben sind die Basen $K\colon \begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}$ und $L\colon \begin{pmatrix}\mathrm{i}\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1+\mathrm{i}\\ 0\end{pmatrix}$ von $\mathbb{C}^2$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$ sowie der Vektor $v \in \mathbb{C}^2$ mit

$$_{K}v = \begin{pmatrix}3\\ 6\mathrm{i}\end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Koordinaten von v bezüglich der Standardbasis $E\colon \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$ und der Basis L an:

$$_{E}v = \begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}3\\ -6+3\mathrm{i}\end{matrix}}\end{pmatrix} \qquad _{L}v = \begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}-6+3\mathrm{i}\\ 6\end{matrix}}\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (*4 Punkte*)

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme über $\mathbb{R}$:

(a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & 2x_3 & = & 1\\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 5\\ -x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & = & 8 \end{array}$$

$$\mathcal{L} = \boxed{\left\{ \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \right\}}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & & & = & -2\\ -x_1 & + & x_2 & = & 5\\ x_1 & + & x_2 & = & 1 \end{array}$$

$$\mathcal{L} = \boxed{\left\{ \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} \right\}}$$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*)

Gegeben seien die Matrizen
$$A_\alpha = \begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ -2 & 0 & -1\\ 2 & 3\alpha & 0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B_\alpha = \begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & \alpha\\ -2 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 3\alpha & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante von A_α und B_α in Abhängigkeit von α:

$$\det(A_\alpha) = \boxed{-6-9\alpha} \qquad \det(B_\alpha) = \boxed{6+9\alpha}$$

(b) Geben Sie an, für welche Werte von α die Matrix A_α nicht invertierbar ist:

$$\boxed{\alpha = -\tfrac{2}{3}}$$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Die reelle Matrix A_α ist für $\alpha \in \mathbb{R}$ gegeben durch $A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ \alpha - 6 & 10 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_{A_\alpha}(\lambda)$ der Matrix A_α in Abhängigkeit von α:

$$\chi_{A_\alpha}(\lambda) = \boxed{1} \cdot\lambda^2 + \boxed{(-12)} \cdot\lambda + \boxed{32 - 2\alpha}.$$

Zerlegen Sie das charakteristische Polynom $\chi_{A_\alpha}(\lambda)$ in Linearfaktoren:

$$\chi_{A_\alpha}(\lambda) = \left(\boxed{6 + \sqrt{2(\alpha+2)}} - \lambda\right) \cdot \left(\boxed{6 - \sqrt{2(\alpha+2)}} - \lambda\right).$$

Geben Sie zwei linear unabhängige Eigenvektoren der Matrix A_α für $\alpha = 16$ an:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ an, für die A_α nur reelle Eigenwerte besitzt: $\boxed{\alpha \geqq -2}$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*)

Betrachten Sie die affine Abbildung $\alpha \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \colon x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Der lineare Anteil von α ist durch eine orthogonale Matrix gegeben. Berechnen Sie:

$$\left| \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \boxed{3}$$

(b) Der lineare Anteil von α definiert die lineare Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \colon x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

Sei E die Standardbasis und $B : (1, -1)^\intercal, (0, 1)^\intercal$ eine weitere Basis von $\mathbb{R}^2$.
Bestimmen Sie die darstellenden Matrizen ${}_E\mathrm{id}_B$, ${}_B\mathrm{id}_E$ und ${}_B\varphi_B$:

$${}_E\mathrm{id}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}_B\mathrm{id}_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}_B\varphi_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8 (*5 Punkte*)

Gegeben sei die Quadrik
$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 5x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2 - 8 = 0 \right\}.$$

(a) Die Matrixbeschreibung der Quadrik ist gegeben durch $Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^\top Ax + 2a^\top x + c = 0 \right\}$, wobei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $a \in \mathbb{R}^2$ und $c \in \mathbb{R}$. Geben Sie A, a und c an:

$$A = \boxed{\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}} \qquad a = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad c = \boxed{-8}$$

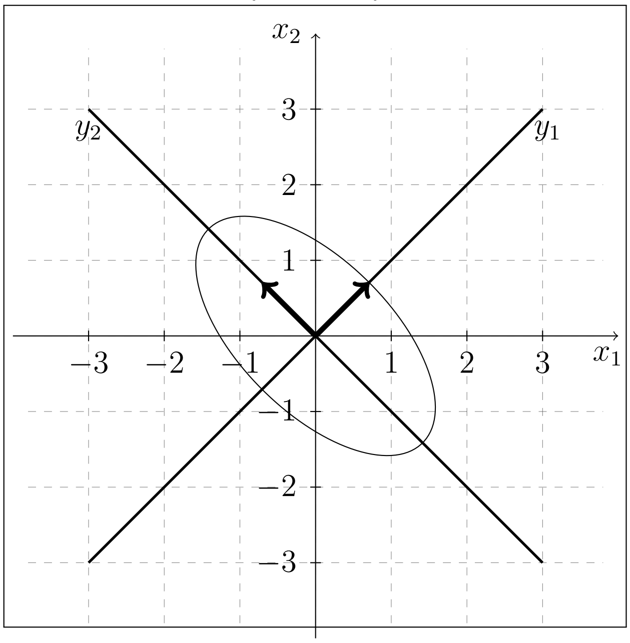
(b) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q:

$$\boxed{-y_1^2 - \tfrac{1}{4}y_2^2 + 1 = 0}$$

(c) Geben Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, in welchem Q in dieser euklidischen Normalform vorliegt:

$$\boxed{\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

(d) Zeichnen Sie die Quadrik Q und das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ im Standardkoordinatensystem:



Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/6	/4	/4	/3	/5	/3	/5	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Aufgabe 1 (*1 Punkt*)

Name des Tutors/der Tutorin: $\boxed{}$ **Gruppennr.:** $\boxed{}$

Aufgabe 2 (*6 Punkte*)

Die Ebene E wird aufgespannt durch die Punkte $P_1 = (1,3,6)$, $P_2 = (4,11,12)$ und $P_3 = (2,7,9)$.

(a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E:

$$E = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene E, also eine Gleichung der Form $\langle n|x\rangle = d$ mit normiertem Normalenvektor

$$n = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad d = \boxed{3}\,.$$

(c) Berechnen Sie den Abstand des Punktes $Q = (2,-6,3)$ von der Ebene E: $\boxed{3}$.

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Gegeben sind die Basen $K\colon \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}$ und $L\colon \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}$ von $\mathbb{C}^2$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$ sowie der Vektor $v \in \mathbb{C}^2$ mit

$$_Kv = \begin{pmatrix} 4 \\ 8\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Koordinaten von v bezüglich der Standardbasis $E\colon \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der Basis L an:

$$_Ev = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -8+4\mathrm{i} \\ 4 \end{matrix}} \end{pmatrix} \qquad _Lv = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -8+4\mathrm{i} \\ 8 \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (*4 Punkte*)

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme über $\mathbb{R}$:

(a)
$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & - & 2x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 5x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 1 \end{array} \qquad \mathcal{L} = \boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \right\}}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & & & = & 1 \\ -x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & = & 4 \end{array} \qquad \mathcal{L} = \boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}}$$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*)

Gegeben seien die Matrizen $A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3\alpha & 0 \end{pmatrix}$ und $B_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & \alpha \\ -2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Determinante von A_α und B_α in Abhängigkeit von α:

$$\det(A_\alpha) = \boxed{-3-6\alpha} \qquad \det(B_\alpha) = \boxed{3+6\alpha}$$

(b) Geben Sie an, für welche Werte von α die Matrix A_α nicht invertierbar ist:

$$\boxed{\alpha = -\tfrac{1}{2}}$$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Die reelle Matrix A_α ist für $\alpha \in \mathbb{R}$ gegeben durch $A_\alpha = \begin{pmatrix} -2 & \alpha - 9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_{A_\alpha}(\lambda)$ der Matrix A_α in Abhängigkeit von α:

$$\chi_{A_\alpha}(\lambda) = \boxed{1} \cdot \lambda^2 + \boxed{(-4)} \cdot \lambda + \boxed{6 - 2\alpha}.$$

Zerlegen Sie das charakteristische Polynom $\chi_{A_\alpha}(\lambda)$ in Linearfaktoren:

$$\chi_{A_\alpha}(\lambda) = \left(\boxed{2 + \sqrt{2(\alpha-1)}} - \lambda\right) \cdot \left(\boxed{2 - \sqrt{2(\alpha-1)}} - \lambda\right).$$

Geben Sie zwei linear unabhängige Eigenvektoren der Matrix A_α für $\alpha = 3$ an:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ an, für die A_α nur reelle Eigenwerte besitzt: $\boxed{\alpha \geqq 1}$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*)

Betrachten Sie die affine Abbildung $\alpha \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \colon x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Der lineare Anteil von α ist durch eine orthogonale Matrix gegeben. Berechnen Sie:

$$\left| \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \boxed{2}$$

(b) Der lineare Anteil von α definiert die lineare Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \colon x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

Sei E die Standardbasis und $B : (0,1)^\intercal, (1,-1)^\intercal$ eine weitere Basis von $\mathbb{R}^2$.
Bestimmen Sie die darstellenden Matrizen ${}_E\mathrm{id}_B$, ${}_B\mathrm{id}_E$ und ${}_B\varphi_B$:

$${}_E\mathrm{id}_B = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} \qquad {}_B\mathrm{id}_E = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \qquad {}_B\varphi_B = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 8 (*5 Punkte*)

Gegeben sei die Quadrik $$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 5x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2 - 8 = 0 \right\}.$$

(a) Die Matrixbeschreibung der Quadrik ist gegeben durch $Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0 \right\}$, wobei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $a \in \mathbb{R}^2$ und $c \in \mathbb{R}$. Geben Sie A, a und c an:

$$A = \boxed{\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}} \qquad a = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad c = \boxed{-8}$$

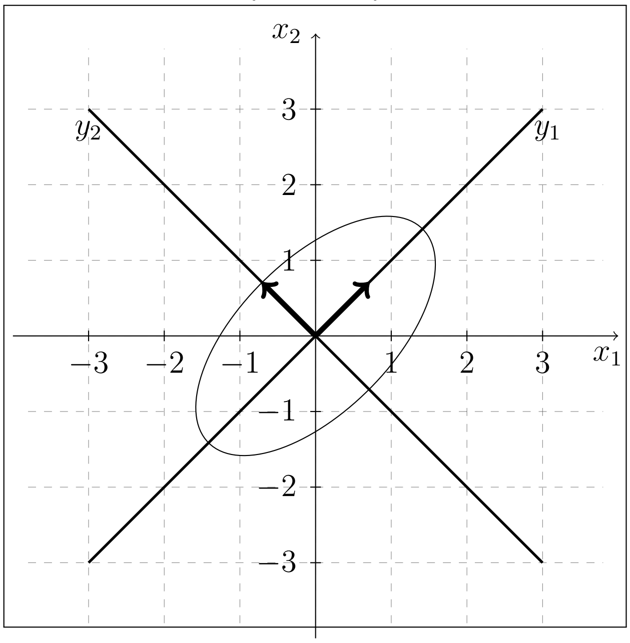
(b) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q:

$$\boxed{-\tfrac{1}{4}y_1^2 - y_2^2 + 1 = 0}$$

(c) Geben Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, in welchem Q in dieser euklidischen Normalform vorliegt:

$$\boxed{\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

(d) Zeichnen Sie die Quadrik Q und das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ im Standardkoordinatensystem:



Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studien-gang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/6	/4	/4	/3	/5	/3	/5	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Aufgabe 1 (*1 Punkt*)

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*6 Punkte*)

Die Ebene E wird aufgespannt durch die Punkte $P_1 = (1, 8, 7)$, $P_2 = (7, 16, 10)$ und $P_3 = (4, 12, 8)$.

(a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E:

$$E = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene E, also eine Gleichung der Form $\langle n | x \rangle = d$ mit normiertem Normalenvektor

$$n = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad d = \boxed{4}\,.$$

(c) Berechnen Sie den Abstand des Punktes $Q = (-7, 4, 3)$ von der Ebene E: $\boxed{4}$.

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Gegeben sind die Basen $K\colon \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}$ und $L\colon \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$ von $\mathbb{C}^2$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$ sowie der Vektor $v \in \mathbb{C}^2$ mit

$$_K v = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Koordinaten von v bezüglich der Standardbasis $E\colon \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der Basis L an:

$$_E v = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 8+4\mathrm{i} \\ -4 \end{matrix}} \end{pmatrix} \qquad _L v = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 8+4\mathrm{i} \\ -8 \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (*4 Punkte*)

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme über $\mathbb{R}$:

(a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & 3x_3 & = & -3 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & -4 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 7x_3 & = & -5 \end{array}$$

$$\mathcal{L} = \boxed{\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \right\}}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & & & = & 3 \\ -x_1 & + & x_2 & = & -1 \\ x_1 & + & x_2 & = & 5 \end{array}$$

$$\mathcal{L} = \boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}}$$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*)

Gegeben seien die Matrizen
$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 3\alpha & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & \alpha \\ -2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante von A_α und B_α in Abhängigkeit von α:

$$\det(A_\alpha) = \boxed{-6 + 15\alpha} \qquad \det(B_\alpha) = \boxed{6 - 15\alpha}$$

(b) Geben Sie an, für welche Werte von α die Matrix A_α nicht invertierbar ist:

$$\boxed{\alpha = \tfrac{2}{5}}$$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Die reelle Matrix A_α ist für $\alpha \in \mathbb{R}$ gegeben durch $A_\alpha = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ \alpha - 7 & -2 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_{A_\alpha}(\lambda)$ der Matrix A_α in Abhängigkeit von α:

$$\chi_{A_\alpha}(\lambda) = \boxed{1} \cdot\lambda^2 + \boxed{(-4)} \cdot\lambda + \boxed{2 - 2\alpha}.$$

Zerlegen Sie das charakteristische Polynom $\chi_{A_\alpha}(\lambda)$ in Linearfaktoren:

$$\chi_{A_\alpha}(\lambda) = \left(\boxed{2 + \sqrt{2(\alpha+1)}} - \lambda\right) \cdot \left(\boxed{2 - \sqrt{2(\alpha+1)}} - \lambda\right).$$

Geben Sie zwei linear unabhängige Eigenvektoren der Matrix A_α für $\alpha = 1$ an:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ an, für die A_α nur reelle Eigenwerte besitzt: $\boxed{\alpha \geqq -1}$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*)

Betrachten Sie die affine Abbildung $\alpha \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \colon x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Der lineare Anteil von α ist durch eine orthogonale Matrix gegeben. Berechnen Sie:

$$\left| \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \boxed{4}$$

(b) Der lineare Anteil von α definiert die lineare Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \colon x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

Sei E die Standardbasis und $B : (-1, 1)^\intercal, (0, 1)^\intercal$ eine weitere Basis von $\mathbb{R}^2$.
Bestimmen Sie die darstellenden Matrizen ${}_E\mathrm{id}_B$, ${}_B\mathrm{id}_E$ und ${}_B\varphi_B$:

$${}_E\mathrm{id}_B = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \qquad {}_B\mathrm{id}_E = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \qquad {}_B\varphi_B = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 8 (*5 Punkte*)

Gegeben sei die Quadrik
$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2 - 9 = 0 \right\}.$$

(a) Die Matrixbeschreibung der Quadrik ist gegeben durch $Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^\mathsf{T} Ax + 2a^\mathsf{T} x + c = 0 \right\}$, wobei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $a \in \mathbb{R}^2$ und $c \in \mathbb{R}$. Geben Sie A, a und c an:

$$A = \boxed{\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}} \qquad a = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad c = \boxed{-9}$$

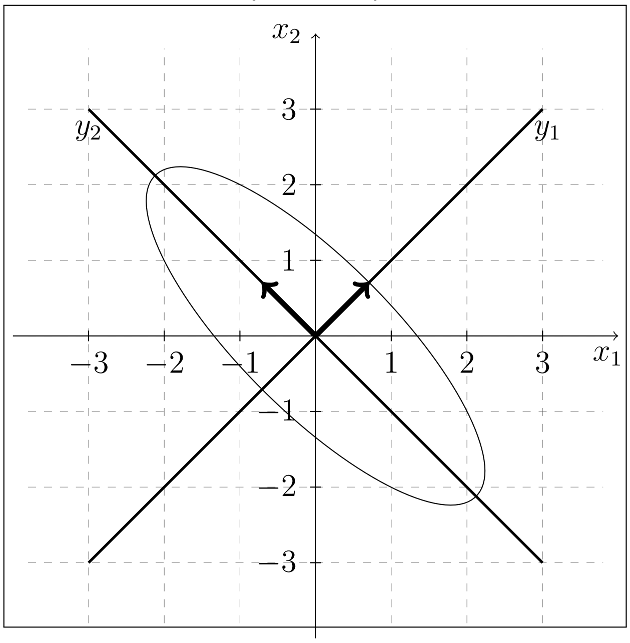
(b) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q:

$$\boxed{-y_1^2 - \tfrac{1}{9}y_2^2 + 1 = 0}$$

(c) Geben Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, in welchem Q in dieser euklidischen Normalform vorliegt:

$$\boxed{\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

(d) Zeichnen Sie die Quadrik Q und das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ im Standardkoordinatensystem:



Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studiengang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/6	/4	/4	/3	/5	/3	/5	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Aufgabe 1 (*1 Punkt*)

Name des Tutors/der Tutorin: **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*6 Punkte*)

Die Ebene E wird aufgespannt durch die Punkte $P_1 = (4, 0, 5)$, $P_2 = (7, 6, 13)$ und $P_3 = (5, 3, 9)$.

(a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E:

$$E = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{matrix}} \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 6 \\ 8 \end{matrix}} \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene E, also eine Gleichung der Form $\langle n|x\rangle = d$ mit normiertem Normalenvektor

$$n = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 \\ -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{matrix}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad d = \boxed{3}\,.$$

(c) Berechnen Sie den Abstand des Punktes $Q = (3, -8, -4)$ von der Ebene E: $\boxed{1}$.

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Gegeben sind die Basen $K\colon \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}$ und $L\colon \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}$ von $\mathbb{C}^2$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$ sowie der Vektor $v \in \mathbb{C}^2$ mit

$$_K v = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Koordinaten von v bezüglich der Standardbasis $E\colon \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der Basis L an:

$$_E v = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -3 \\ 6+3\mathrm{i} \end{matrix}} \end{pmatrix} \qquad _L v = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 6+3\mathrm{i} \\ -6 \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (*4 Punkte*)

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme über $\mathbb{R}$:

(a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & 3x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 7 \end{array}$$

$$\mathcal{L} = \boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \right\}}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & & & = & 2 \\ -x_1 & + & x_2 & = & -4 \\ x_1 & + & x_2 & = & 0 \end{array}$$

$$\mathcal{L} = \boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}}$$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*)

Gegeben seien die Matrizen $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3\alpha & 0 \end{pmatrix}$ und $B_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & \alpha \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Determinante von A_α und B_α in Abhängigkeit von α:

$$\det(A_\alpha) = \boxed{-3+9\alpha} \qquad \det(B_\alpha) = \boxed{3-9\alpha}$$

(b) Geben Sie an, für welche Werte von α die Matrix A_α nicht invertierbar ist:

$$\boxed{\alpha = \tfrac{1}{3}}$$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Die reelle Matrix A_α ist für $\alpha \in \mathbb{R}$ gegeben durch $A_\alpha = \begin{pmatrix} 6 & \alpha - 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_{A_\alpha}(\lambda)$ der Matrix A_α in Abhängigkeit von α:

$$\chi_{A_\alpha}(\lambda) = \boxed{1} \cdot \lambda^2 + \boxed{(-8)} \cdot \lambda + \boxed{20 - 2\alpha}.$$

Zerlegen Sie das charakteristische Polynom $\chi_{A_\alpha}(\lambda)$ in Linearfaktoren:

$$\chi_{A_\alpha}(\lambda) = \left(\boxed{4 + \sqrt{2(\alpha - 2)}} - \lambda\right) \cdot \left(\boxed{4 - \sqrt{2(\alpha - 2)}} - \lambda\right).$$

Geben Sie zwei linear unabhängige Eigenvektoren der Matrix A_α für $\alpha = 10$ an:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ an, für die A_α nur reelle Eigenwerte besitzt: $\boxed{\alpha \geqq 2}$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*)

Betrachten Sie die affine Abbildung $\alpha \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \colon x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Der lineare Anteil von α ist durch eine orthogonale Matrix gegeben. Berechnen Sie:

$$\left| \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \boxed{5}$$

(b) Der lineare Anteil von α definiert die lineare Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \colon x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

Sei E die Standardbasis und $B : (0,1)^\intercal, (-1,1)^\intercal$ eine weitere Basis von $\mathbb{R}^2$.
Bestimmen Sie die darstellenden Matrizen ${}_E\mathrm{id}_B$, ${}_B\mathrm{id}_E$ und ${}_B\varphi_B$:

$${}_E\mathrm{id}_B = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \qquad {}_B\mathrm{id}_E = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} \qquad {}_B\varphi_B = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 8 (*5 Punkte*)

Gegeben sei die Quadrik $$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 5x_1^2 - 8x_1x_2 + 5x_2^2 - 9 = 0 \right\}.$$

(a) Die Matrixbeschreibung der Quadrik ist gegeben durch $Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0 \right\}$, wobei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $a \in \mathbb{R}^2$ und $c \in \mathbb{R}$. Geben Sie A, a und c an:

$$A = \boxed{\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}} \qquad a = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad c = \boxed{-9}$$

(b) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q:

$$\boxed{-\tfrac{1}{9}y_1^2 - y_2^2 + 1 = 0}$$

(c) Geben Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, in welchem Q in dieser euklidischen Normalform vorliegt:

$$\boxed{\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

(d) Zeichnen Sie die Quadrik Q und das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ im Standardkoordinatensystem: