Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studien-gang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte	/1	/5	/7	/11	/3	/2	/2	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*5 Punkte*) Gegeben seien die Ebenen

$$E_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ und } E_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform von E_2:

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| x \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

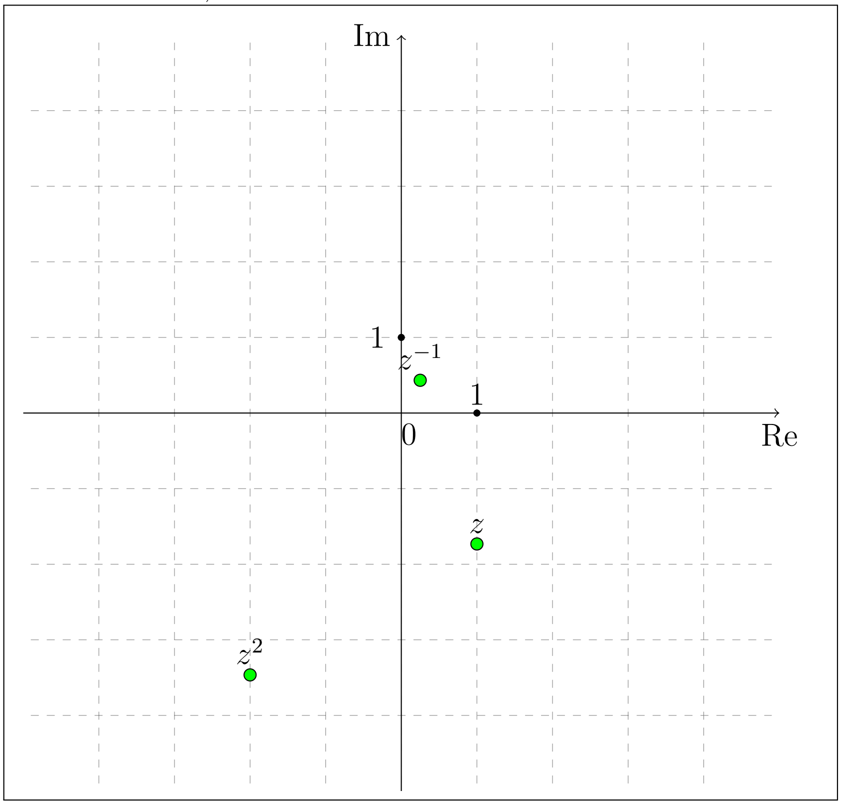
(b) Bestimmen Sie die Schnittmenge $E_1 \cap E_2$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 3 (7 *Punkte*) Gegeben sei die komplexe Zahl $z = 1 - \sqrt{3}\mathrm{i}$. Beschreiben Sie z durch Polarkoordinaten.

$$z = \boxed{2\left(\cos\left(\tfrac{5}{3}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{5}{3}\pi\right)\right)}$$

Zeichnen Sie z, z^2 und z^{-1} ein.



Berechnen Sie die Lösungen der folgenden Gleichung in Polarkoordinaten.

$$w^3 = 1 - \sqrt{3}\mathrm{i}$$

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\tfrac{5}{9}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{5}{9}\pi\right)\right) \\ w_1 &= \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\tfrac{11}{9}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{11}{9}\pi\right)\right) \\ w_2 &= \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\tfrac{17}{9}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{17}{9}\pi\right)\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (*11 Punkte*) Für $t \in \mathbb{R}$ seien die Matrizen gegeben:

$$A_t = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 \\ 4 & -10 & t-4 \\ -1 & 7 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie, wenn möglich, die folgenden Matrizenprodukte. Tragen Sie „nicht definiert“ in den Kasten ein, falls die Multiplikation nicht möglich ist.

$B\,A_0 = \boxed{(28 \;\; -72 \;\; -32)}$ $\quad B^{\mathsf{T}}\,A_0 = \boxed{\text{„nicht definiert“}}$ $\quad B^{\mathsf{T}}\,B = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & 12 & 0 \\ 12 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

(b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A_0\,x = B^{\mathsf{T}}$: $\boxed{x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}}$

(c) Berechnen Sie die Determinante von A_t: $\det(A_t) = \boxed{-8\,t - 24}$

(d) Für welche $t \in \mathbb{R}$ hat $A_t\,x = 0$ unendlich viele Lösungen? $t = \boxed{-3}$

Geben Sie für den Fall die Lösungsmenge an: $\boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)}$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) Gegeben seien die Punkte

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad Q_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit E sei die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ bezeichnet. Wir betrachten die linearen Abbildungen $\alpha, \beta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\alpha\left((x_1, x_2)^{\mathsf{T}}\right) = (2\,x_1 + x_2,\, x_1 - x_2)^{\mathsf{T}}$ und $\beta(P_1) = Q_1,\ \beta(P_2) = Q_2$.

Geben Sie folgende Matrizen an:

${}_E\alpha_E = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$ $\quad {}_E\beta_E = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$ $\quad {}_E(\alpha \circ \beta)_E = \boxed{\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}$

Aufgabe 6 (*2 Punkte*) Geben Sie eine Abbildung $f\colon\ [2,4] \to [4,7]$ an, die surjektiv und nicht injektiv ist.

$$f\colon\ [2,4] \to [4,7] : x \mapsto \boxed{\begin{cases} 3x-2 & \text{falls} \quad x \leqq 3 \\ 5 & \text{falls} \quad x > 3 \end{cases}}$$

Aufgabe 7 (*2 Punkte*) Gegeben seien in $\mathbb{R}^4$ die beiden linear unabhängigen Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sowie der Untervektorraum $U = \mathrm{L}\,(v_1, v_2)$. Berechnen sie den Koordinatenvektor des Punktes $P = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis $B : v_1, v_2$ von U.

$${}_{B}P = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studiengang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte	/1	/5	/7	/11	/3	/2	/2	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*5 Punkte*) Gegeben seien die Ebenen

$$E_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ und } E_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform von E_2:

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \middle| x \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

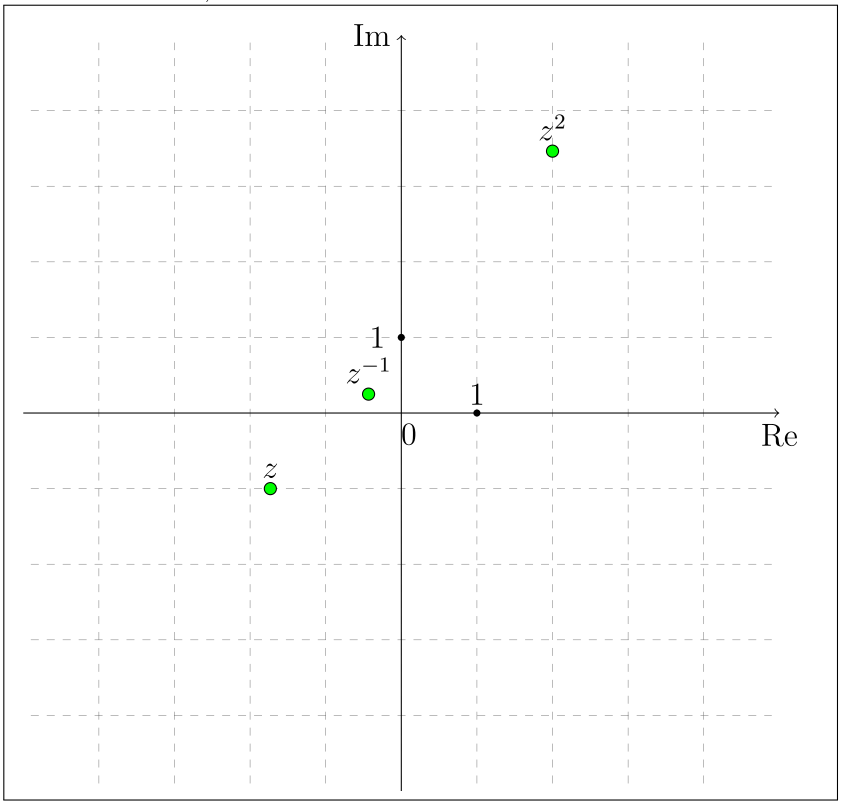
(b) Bestimmen Sie die Schnittmenge $E_1 \cap E_2$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 3 (*7 Punkte*) Gegeben sei die komplexe Zahl $z = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$. Beschreiben Sie z durch Polarkoordinaten.

$$z = \boxed{2\left(\cos\left(\tfrac{7}{6}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{7}{6}\pi\right)\right)}$$

Zeichnen Sie z, z^2 und z^{-1} ein.



Berechnen Sie die Lösungen der folgenden Gleichung in Polarkoordinaten.

$$w^3 = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$$

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\tfrac{7}{18}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{7}{18}\pi\right)\right) \\ w_1 &= \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\tfrac{19}{18}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{19}{18}\pi\right)\right) \\ w_2 &= \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\tfrac{31}{18}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{31}{18}\pi\right)\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (*11 Punkte*) Für $t \in \mathbb{R}$ seien die Matrizen gegeben:

$$A_t = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & t-6 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie, wenn möglich, die folgenden Matrizenprodukte. Tragen Sie „nicht definiert“ in den Kasten ein, falls die Multiplikation nicht möglich ist.

$A_0\, B^\top = \boxed{\begin{pmatrix} -24 \\ -38 \\ 22 \end{pmatrix}}$ $\quad B^\top B = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 25 \end{pmatrix}}$ $\quad B\,B =$ „nicht definiert“

(b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A_0\, x = B^\top$: $\quad x = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

(c) Berechnen Sie die Determinante von A_t: $\quad \det(A_t) = -8\,t - 8$

(d) Für welche $t \in \mathbb{R}$ hat $A_t\, x = 0$ unendlich viele Lösungen? $t = -1$

Geben Sie für den Fall die Lösungsmenge an: $\quad \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) Gegeben seien die Punkte

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad Q_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad Q_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit E sei die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ bezeichnet. Wir betrachten die linearen Abbildungen $\alpha, \beta \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\alpha\left((x_1, x_2)^\top\right) = (x_1 + 2\,x_2,\ x_2 - x_1)^\top$ und $\beta(P_1) = Q_1,\ \beta(P_2) = Q_2$.

Geben Sie folgende Matrizen an:

${}_E\alpha_E = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$ $\qquad {}_E\beta_E = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$ $\qquad {}_E(\alpha \circ \beta)_E = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}}$

Aufgabe 6 (*2 Punkte*) Geben Sie eine Abbildung $f\colon\ [3,5] \to [4,7]$ an, die surjektiv und nicht injektiv ist.

$$f\colon\ [3,5] \to [4,7] : x \mapsto \boxed{\begin{cases} 3x-5 & \text{falls} \quad x \leqq 4 \\ 5 & \text{falls} \quad x > 4 \end{cases}}$$

Aufgabe 7 (*2 Punkte*) Gegeben seien in $\mathbb{R}^4$ die beiden linear unabhängigen Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie der Untervektorraum $U = \mathrm{L}\left(v_1, v_2\right)$. Berechnen sie den Koordinatenvektor des Punktes $P = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis $B : v_1, v_2$ von U.

$${}_{B}P = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}}$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte	/1	/5	/7	/11	/3	/2	/2	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*5 Punkte*) Gegeben seien die Ebenen

$$E_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ und } E_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform von E_2:

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| x \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

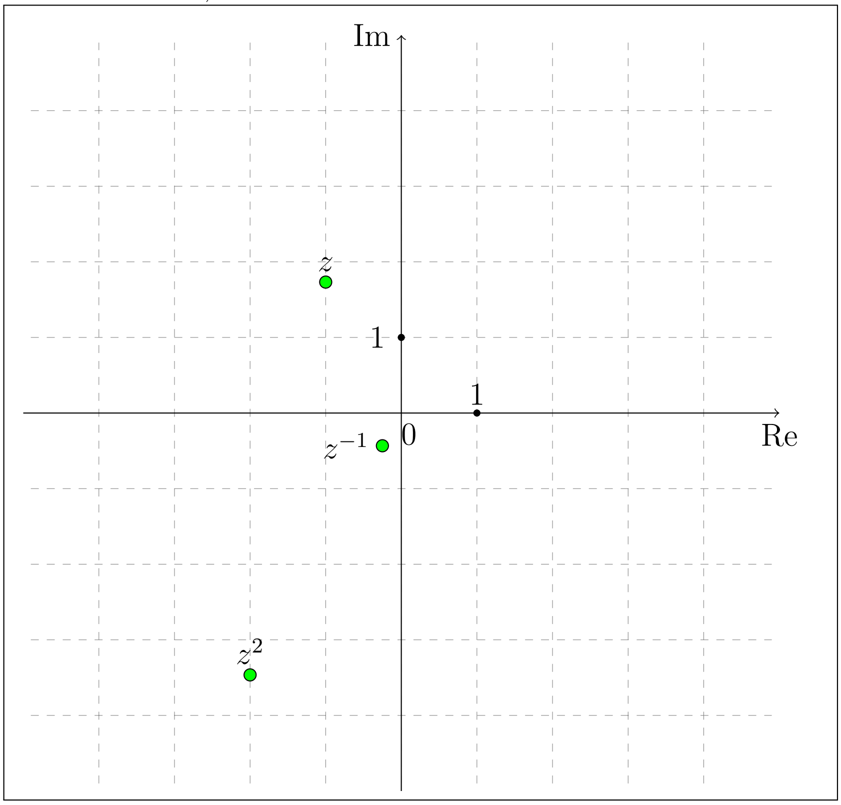
(b) Bestimmen Sie die Schnittmenge $E_1 \cap E_2$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \middle| \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 3 (7 *Punkte*) Gegeben sei die komplexe Zahl $z = -1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$. Beschreiben Sie z durch Polarkoordinaten.

$$z = \boxed{2\left(\cos\left(\tfrac{2}{3}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{2}{3}\pi\right)\right)}$$

Zeichnen Sie z, z^2 und z^{-1} ein.



Berechnen Sie die Lösungen der folgenden Gleichung in Polarkoordinaten.

$$w^3 = -1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$$

$$\begin{aligned}
w_0 &= \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\tfrac{2}{9}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{2}{9}\pi\right)\right)\\
w_1 &= \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\tfrac{8}{9}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{8}{9}\pi\right)\right)\\
w_2 &= \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\tfrac{14}{9}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{14}{9}\pi\right)\right)
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (*11 Punkte*) Für $t \in \mathbb{R}$ seien die Matrizen gegeben:

$$A_t = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 4 & 14 & t-10 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie, wenn möglich, die folgenden Matrizenprodukte. Tragen Sie „nicht definiert" in den Kasten ein, falls die Multiplikation nicht möglich ist.

$$B^\intercal B = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 8 & 16 \end{pmatrix}} \qquad B^\intercal A_0 = \boxed{\text{„nicht definiert"}} \qquad B\,B^\intercal = \boxed{20}$$

(b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A_0\,x = B^\intercal$:

$$\boxed{x = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

(c) Berechnen Sie die Determinante von A_t: $\det(A_t) = \boxed{24 - 8\,t}$

(d) Für welche $t \in \mathbb{R}$ hat $A_t\,x = 0$ unendlich viele Lösungen? $t = \boxed{3}$

Geben Sie für den Fall die Lösungsmenge an: $\boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)}$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) Gegeben seien die Punkte

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad Q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Mit E sei die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ bezeichnet. Wir betrachten die linearen Abbildungen $\alpha, \beta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\alpha\left((x_1, x_2)^\intercal\right) = (x_2 - x_1,\ x_1 + 2\,x_2)^\intercal$ und $\beta(P_1) = Q_1,\ \beta(P_2) = Q_2$.

Geben Sie folgende Matrizen an:

$${}_E\alpha_E = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} \qquad {}_E\beta_E = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \qquad {}_E(\alpha \circ \beta)_E = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 6 (*2 Punkte*) Geben Sie eine Abbildung $f\colon\ [-4,-2] \to [4,7]$ an, die surjektiv und nicht injektiv ist.

$$f\colon\ [-4,-2] \to [4,7] : x \mapsto \boxed{\begin{cases} 3x+16 & \text{falls} \quad x \leqq -3 \\ 5 & \text{falls} \quad x > -3 \end{cases}}$$

Aufgabe 7 (*2 Punkte*) Gegeben seien in $\mathbb{R}^4$ die beiden linear unabhängigen Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie der Untervektorraum $U = \mathrm{L}\,(v_1, v_2)$. Berechnen sie den Koordinatenvektor des Punktes $P = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis $B : v_1, v_2$ von U.

$${}_{B}P = \boxed{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studien-gang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte	/1	/5	/7	/11	/3	/2	/2	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*5 Punkte*) Gegeben seien die Ebenen

$$E_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ und } E_2 : \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform von E_2:

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

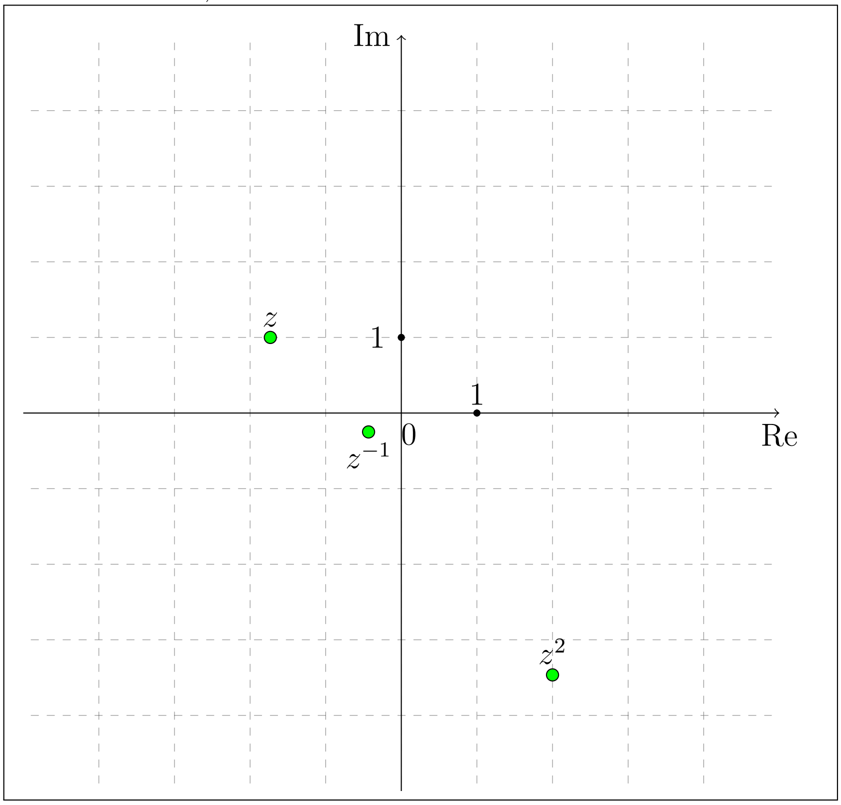
(b) Bestimmen Sie die Schnittmenge $E_1 \cap E_2$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 3 (*7 Punkte*) Gegeben sei die komplexe Zahl $z = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$. Beschreiben Sie z durch Polarkoordinaten.

$$z = \boxed{2\left(\cos\left(\tfrac{5}{6}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{5}{6}\pi\right)\right)}$$

Zeichnen Sie z, z^2 und z^{-1} ein.



Berechnen Sie die Lösungen der folgenden Gleichung in Polarkoordinaten.

$$w^3 = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$$

$$\boxed{\begin{aligned} w_0 &= \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\tfrac{5}{18}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{5}{18}\pi\right)\right) \\ w_1 &= \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\tfrac{17}{18}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{17}{18}\pi\right)\right) \\ w_2 &= \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\tfrac{29}{18}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{29}{18}\pi\right)\right) \end{aligned}}$$

Aufgabe 4 (*11 Punkte*) Für $t \in \mathbb{R}$ seien die Matrizen gegeben:

$$A_t = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 \\ 4 & -6 & t-5 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie, wenn möglich, die folgenden Matrizenprodukte. Tragen Sie „nicht definiert“ in den Kasten ein, falls die Multiplikation nicht möglich ist.

$A_0\, B =$ „nicht definiert“ $\quad B^\intercal\, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad A_0\, B^\intercal = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

(b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A_0\, x = B^\intercal$: $\quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) Berechnen Sie die Determinante von A_t: $\quad \det(A_t) = -8\,t - 16$

(d) Für welche $t \in \mathbb{R}$ hat $A_t\, x = 0$ unendlich viele Lösungen? $t = -2$

Geben Sie für den Fall die Lösungsmenge an: $\quad \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) Gegeben seien die Punkte

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad Q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad Q_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit E sei die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ bezeichnet. Wir betrachten die linearen Abbildungen $\alpha, \beta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\alpha\left((x_1, x_2)^\intercal\right) = (x_1 - x_2,\, 2\,x_1 + x_2)^\intercal$ und $\beta(P_1) = Q_1,\ \beta(P_2) = Q_2$.

Geben Sie folgende Matrizen an:

${}_E\alpha_E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}_E\beta_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad {}_E(\alpha \circ \beta)_E = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6 (*2 Punkte*) Geben Sie eine Abbildung $f\colon\ [-5,-3] \to [4,7]$ an, die surjektiv und nicht injektiv ist.

$$f\colon\ [-5,-3] \to [4,7] : x \mapsto \boxed{\begin{cases} 3x+19 & \text{falls} \quad x \leqq -4 \\ 5 & \text{falls} \quad x > -4 \end{cases}}$$

Aufgabe 7 (*2 Punkte*) Gegeben seien in $\mathbb{R}^4$ die beiden linear unabhängigen Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie der Untervektorraum $U = \mathrm{L}\,(v_1, v_2)$. Berechnen sie den Koordinatenvektor des Punktes $P = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis $B : v_1, v_2$ von U.

$${}_BP = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}}$$