Name, Vorname:

Matrikel-Nummer:

Studien-gang:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte	/1	/3	/10	/3	/4	/6	/4	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Gegeben seien die Vektoren $v_1 = (1,\,2,\,0)^\intercal$, $v_2 = (0,\,1,\,1)^\intercal$. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $F\colon f_1,\, f_2,\, f_3$ von $\mathbb{R}^3$ so, dass $L(f_1) = L(v_1)$, $L(f_1, f_2) = L(v_1, v_2)$ und $L(f_1, f_2, f_3) = \mathbb{R}^3$ ist.

$f_1 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}}$ $f_2 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}}$ $f_3 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}}$

Aufgabe 3 (*10 Punkte*) Gegeben seien die folgenden Quadriken:

$$\mathcal{Q}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 8x_1 + 8x_2 = 0 \right\} \text{ und}$$

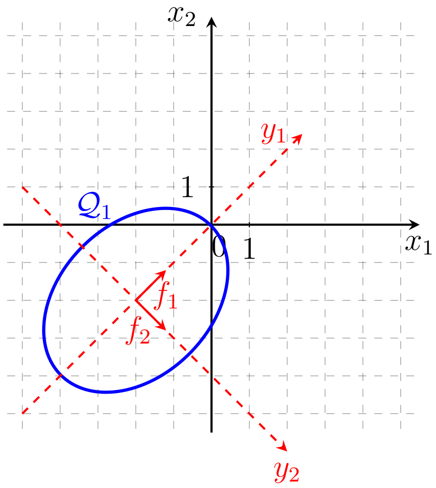
$$\mathcal{Q}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -4x_1^2 + 6x_1x_2 + 4x_2^2 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie zu jeder der Quadriken jeweils eine euklidische Normalform und ein kartesisches Koordinatensystem, bezüglich dessen die jeweilige Quadrik diese euklidische Normalform annimmt. Skizzieren Sie das jeweilige Koordinatensystem sowie die Quadrik im Standardkoordinatensystem.

Zu $\mathcal{Q}_1$:

Euklidische Normalform: $-\frac{1}{8}y_1^2 - \frac{1}{4}y_2^2 + 1 = 0$

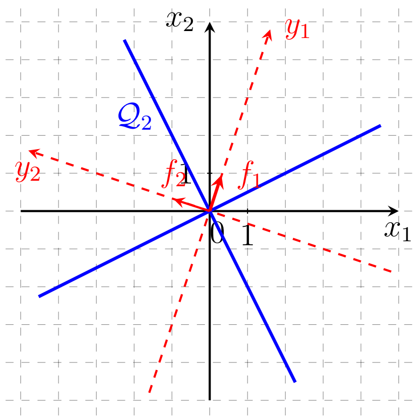
Koordinatensystem: $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} ; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$



Zu $\mathcal{Q}_2$:

Euklidische Normalform: $y_1^2 - y_2^2 = 0$

Koordinatensystem: $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$



Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Gegeben ist die vom reellen Parameter β abhängige Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$a_n := (5-2\beta)^n.$$

Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(a) beschränkt? $\boxed{\{\beta \in \mathbb{R} \mid 2 \leqq \beta \leqq 3\}}$

(b) monoton? $\boxed{\left\{\beta \in \mathbb{R} \mid \beta \leqq \frac{5}{2}\right\}}$

(c) konvergent? $\boxed{\{\beta \in \mathbb{R} \mid 2 \leqq \beta < 3\}}$

Aufgabe 5 (*4 Punkte*) Im $\mathbb{C}^{3\times 3}$ sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1-2\mathrm{i} & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 2+\mathrm{i} & 0 \\ 1-\mathrm{i} & 0 & -1-\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) A besitzt den Eigenvektor $v_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}$. Berechnen Sie den zugehörigen Eigenwert. $\boxed{-\mathrm{i}}$

(b) Geben Sie einen weiteren, von v_1 linear unabhängigen, Eigenvektor der Matrix A an. $\boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

(c) Geben Sie eine Diagonalmatrix D an, zu der A konjugiert ist.

$$D = \boxed{\begin{pmatrix} 2+\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & -2-2\mathrm{i} \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 6 (*6 Punkte*) Seien $\mathbb{F} := \left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right)$ ein Koordinatensystem und $\mathbb{E}$ das Standardkoordinatensystem für $\mathbb{R}^2$. In Standardkoordinaten sei die affine Abbildung
$\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon v \mapsto \begin{pmatrix}4 & 2\\-1 & 3\end{pmatrix} v + \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$ gegeben. Bestimmen Sie

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} = x \mapsto \boxed{\begin{pmatrix}4 & -2\\0 & 1\end{pmatrix}} \, x + \boxed{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}} \qquad {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} = y \mapsto \boxed{\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{2}\\0 & 1\end{pmatrix}} \, y + \boxed{\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\1\end{pmatrix}}$$

$${}_{\mathbb{F}}\alpha_{\mathbb{F}} = {}_{\mathbb{F}}v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix}2 & 1\\-4 & 5\end{pmatrix} {}_{\mathbb{F}}v + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}}$$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Gegeben seien in $\mathbb{R}^2$ das Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right)$$

und die Gerade mit der Gleichung $x_2 = 2x_1$. Mit β bezeichnen wir die Spiegelung an dieser Geraden. Berechnen Sie die folgenden Matrizen:

$${}_{\mathbb{E}}\mathrm{id}_{\mathbb{F}} = \boxed{\begin{pmatrix}1 & -2\\2 & 1\end{pmatrix}} \qquad {}_{\mathbb{F}}\mathrm{id}_{\mathbb{E}} = \boxed{\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 2\\-2 & 1\end{pmatrix}}$$

$${}_{\mathbb{F}}\beta_{\mathbb{F}} = \boxed{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}} \qquad {}_{\mathbb{E}}\beta_{\mathbb{E}} = \boxed{\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3 & 4\\4 & 3\end{pmatrix}}$$
