Aufgabe 8 (4 Punkte)

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z+5\mathrm{i}}{15}\right)^k$	$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{3}+(-1)^n\right)^n \left(z+\sqrt{7}\right)^n$	$\sum_{j=2}^{\infty} 4^j \left(\frac{1}{7}z - 2\mathrm{i} + 1\right)^j$
z_0	$-5\mathrm{i}$	$-\sqrt{7}$	$-7+14\mathrm{i}$
ρ	15	$\frac{1}{\sqrt{3}+1}$	$\frac{7}{4}$

Aufgabe 9 (6 Punkte)

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Für Konstanten $a, b, c, t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ ist die Parametrisierung

$$C\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^2 \colon t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ at^2+bt+c \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Für $a = 0$ parametrisiert C eine Strecke. Bestimmen Sie die Konstanten t_0, t_1, b, c so, dass C die Strecke von $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ parametrisiert.

$t_0 = \boxed{2}$ $t_1 = \boxed{3}$ $b = \boxed{2}$ $c = \boxed{-1}$

(b) Bestimmen Sie die Konstanten t_0, t_1, a, b, c so, dass C die Parabel von $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ über $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ parametrisiert.

$t_0 = \boxed{0}$ $t_1 = \boxed{4}$ $a = \boxed{1}$ $b = \boxed{-4}$ $c = \boxed{4}$

(c) Bestimmen Sie ein Potential U zum Vektorfeld

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon x \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}.$$

$$U(x_1, x_2) = \boxed{x_1^2 + x_2^2}$$

Berechnen Sie für die Parabel aus **(b)**

$$\int_{t_0}^{t_1} g(C(t)) \bullet C'(t)\,\mathrm{d}\,t = \boxed{16}$$

Scheinklausur **Höhere Mathematik 2** **18. 7. 2015**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

■1 ☐2 ☐3 ☐4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt)

☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ankreuzen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+3x-2x^2}{4-\sqrt{2}x+9x^2}$	$\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(k+1)(k+2)}{(k+2)!}$	$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-27}{\ln(x-2)}$
$-\dfrac{2}{9}$	e	27

Aufgabe 3 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{\sqrt{3}x}{\tan(x)}.$$

Berechnen Sie die erste Ableitung von f.

$$f'(x) = \boxed{\sqrt{3}\left(\frac{\tan(x) - \frac{x}{(\cos(x))^2}}{(\tan(x))^2}\right)}$$

Stellen Sie das Taylorpolynom $T_1\left(f, x, \frac{\pi}{6}\right)$ der Stufe 1 um den Entwicklungspunkt $\frac{\pi}{6}$ auf.

$$T_1\left(f, x, \frac{\pi}{6}\right) = \boxed{\frac{\pi}{2} + \left(3 - \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}$$

Aufgabe 4 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x\,|x+1| + 2x.$$

Bestimmen Sie zu $x_0 = -1$ die folgenden Grenzwerte.

$$\lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \boxed{1} \qquad \lim_{x\to x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \boxed{3}$$

Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist f differenzierbar? $\boxed{x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}}$

Aufgabe 5 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$\int \mathrm{e}^x \sin(2\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$	$\left[-\frac{1}{2}\cos(2\mathrm{e}^x)\right]$
$\int_0^{\ln(\pi)} \mathrm{e}^x \sin(2\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$	$-\frac{1}{2}(1-\cos(2))$
$\int x^4 \ln(x)\,\mathrm{d}x$	$\left[\frac{1}{5}x^5\ln(x) - \frac{1}{25}x^5\right]$
$\int_0^1 x^4 \ln(x)\,\mathrm{d}x$	$-\frac{1}{25}$

Aufgabe 6 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Führen Sie nach Polynomdivision die Partialbruchzerlegung durch:

$$\frac{x^3+x^2+4x+2}{x(x^2+2)} = \boxed{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{2+x^2}}$$

Berechnen Sie das unbestimmte Integral:

$$\int \frac{x^3+x^2+4x+2}{x(x^2+2)}\,\mathrm{d}x = \boxed{\left[x + \ln|x| + \sqrt{2}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]}$$

Aufgabe 7 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ■2

Gegeben seien die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\colon (x_1,x_2,x_3) \mapsto \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (y_1,y_2) \mapsto \begin{pmatrix} \sin(y_1y_2) \\ \sin(y_2) \end{pmatrix}.$$

Weiterhin sei $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto (g \circ f)(x)$. Berechnen Sie die Jacobi-Matrix der Funktion h.

$$\mathrm{J}h\,(x_1,x_2,x_3) = \boxed{\begin{pmatrix} x_2x_3\cos(x_1x_2x_3) & x_1x_3\cos(x_1x_2x_3) & x_1x_2\cos(x_1x_2x_3) \\ 0 & 0 & \cos(x_3) \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 8 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z-6\mathrm{i}}{13}\right)^k$	$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{2}+(-1)^n\right)^n \left(z+\sqrt{5}\right)^n$	$\sum_{j=2}^{\infty} 5^j \left(\frac{1}{8}z - 2\mathrm{i} + 1\right)^j$
z_0	$6\mathrm{i}$	$-\sqrt{5}$	$-8+16\mathrm{i}$
ρ	13	$\frac{1}{\sqrt{2}+1}$	$\frac{8}{5}$

Aufgabe 9 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Für Konstanten $a, b, c, t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ ist die Parametrisierung

$$C\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^2 \colon t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ at^2 + bt + c \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Für $a = 0$ parametrisiert C eine Strecke. Bestimmen Sie die Konstanten t_0, t_1, b, c so, dass C die Strecke von $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ parametrisiert.

$t_0 = \boxed{-2}$ $t_1 = \boxed{-1}$ $b = \boxed{3}$ $c = \boxed{4}$

(b) Bestimmen Sie die Konstanten t_0, t_1, a, b, c so, dass C die Parabel von $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ über $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ parametrisiert.

$t_0 = \boxed{-3}$ $t_1 = \boxed{1}$ $a = \boxed{-1}$ $b = \boxed{-2}$ $c = \boxed{3}$

(c) Bestimmen Sie ein Potential U zum Vektorfeld

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon x \mapsto \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{pmatrix}.$$

$$U(x_1, x_2) = \boxed{-x_1^2 - x_2^2}$$

Berechnen Sie für die Parabel aus **(b)**

$$\int_{t_0}^{t_1} g(C(t)) \bullet C'(t) \,\mathrm{d}\, t = \boxed{8}$$

Scheinklausur **Höhere Mathematik 2** **18. 7. 2015**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ☐1 ■2 ☐3 ☐4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ankreuzen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (3 Punkte) 0 1 2 3

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2-3x+3x^2}{3+\sqrt{2}x-8x^2}$	$\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{3k+3}{(k+1)!}$	$\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^3-64}{\ln(x-3)}$
$-\dfrac{3}{8}$	3e	48

Aufgabe 3 (3 Punkte) 0 1 2 3

Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{3x}{\tan(x)}.$$

Berechnen Sie die erste Ableitung von f.

$$f'(x) = \boxed{3\left(\frac{\tan(x) - \frac{x}{(\cos(x))^2}}{(\tan(x))^2}\right)}$$

Stellen Sie das Taylorpolynom $T_1\left(f, x, \frac{\pi}{3}\right)$ der Stufe 1 um den Entwicklungspunkt $\frac{\pi}{3}$ auf.

$$T_1\left(f, x, \frac{\pi}{3}\right) = \boxed{\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \left(\sqrt{3} - \frac{4\pi}{3}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}$$

Aufgabe 4 (3 Punkte) 0 1 2 3

Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x\,|x-2| + 3x.$$

Bestimmen Sie zu $x_0 = 2$ die folgenden Grenzwerte.

$$\lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \boxed{5} \qquad \lim_{x\to x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \boxed{1}$$

Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist f differenzierbar? $\boxed{x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}}$

Aufgabe 5 (4 Punkte) 0 1 2 3 4

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$\int e^x \cos(2e^x)\,\mathrm{d}x$	$\left[\frac{1}{2}\sin(2e^x)\right]$
$\int_0^{\ln(\pi)} e^x \cos(2e^x)\,\mathrm{d}x$	$-\frac{1}{2}\sin(2)$
$\int x^5 \ln(x)\,\mathrm{d}x$	$\left[\frac{1}{6}x^6\ln(x) - \frac{1}{36}x^6\right]$
$\int_0^1 x^5 \ln(x)\,\mathrm{d}x$	$-\frac{1}{36}$

Aufgabe 6 (5 Punkte) 0 1 2 3 4 5

Führen Sie nach Polynomdivision die Partialbruchzerlegung durch:

$$\frac{-x^3+2x^2-2x+6}{x(x^2+3)} = \boxed{-1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2+3}}$$

Berechnen Sie das unbestimmte Integral:

$$\int \frac{-x^3+2x^2-2x+6}{x(x^2+3)}\,\mathrm{d}x = \boxed{\left[-x + 2\ln|x| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right]}$$

Aufgabe 7 (2 Punkte) 0 1 2

Gegeben seien die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\colon (x_1,x_2,x_3) \mapsto \begin{pmatrix} x_2x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (y_1,y_2) \mapsto \begin{pmatrix} \sin(y_2) \\ \sin(y_1y_2) \end{pmatrix}.$$

Weiterhin sei $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto (g\circ f)(x)$. Berechnen Sie die Jacobi-Matrix der Funktion h.

$$\mathrm{J}h\,(x_1,x_2,x_3) = \boxed{\begin{pmatrix} \cos(x_1) & 0 & 0 \\ x_2x_3\cos(x_1x_2x_3) & x_1x_3\cos(x_1x_2x_3) & x_1x_2\cos(x_1x_2x_3) \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 8 (4 Punkte)

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z+3\mathrm{i}}{11}\right)^k$	$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{5}+(-1)^n\right)^n \left(z+\sqrt{2}\right)^n$	$\sum_{j=2}^{\infty} 7^j \left(\frac{1}{3}z - 2\mathrm{i} + 1\right)^j$
z_0	$-3\mathrm{i}$	$-\sqrt{2}$	$-3+6\mathrm{i}$
ρ	11	$\frac{1}{\sqrt{5}+1}$	$\frac{3}{7}$

Aufgabe 9 (6 Punkte)

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Für Konstanten $a, b, c, t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ ist die Parametrisierung

$$C\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ at^2 + bt + c \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Für $a = 0$ parametrisiert C eine Strecke. Bestimmen Sie die Konstanten t_0, t_1, b, c so, dass C die Strecke von $\begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 4 \\ -10 \end{pmatrix}$ parametrisiert.

$t_0 = \boxed{3}$ $t_1 = \boxed{4}$ $b = \boxed{-2}$ $c = \boxed{-2}$

(b) Bestimmen Sie die Konstanten t_0, t_1, a, b, c so, dass C die Parabel von $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ über $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ parametrisiert.

$t_0 = \boxed{-1}$ $t_1 = \boxed{3}$ $a = \boxed{1}$ $b = \boxed{-2}$ $c = \boxed{-1}$

(c) Bestimmen Sie ein Potential U zum Vektorfeld

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto \begin{pmatrix} -2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}.$$

$U(x_1, x_2) = \boxed{-x_1^2 + x_2^2}$

Berechnen Sie für die Parabel aus **(b)**

$$\int_{t_0}^{t_1} g(C(t)) \bullet C'(t)\,\mathrm{d}\,t = \boxed{-8}$$

Scheinklausur | **Höhere Mathematik 2** | **18. 7. 2015**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ☐1 ☐2 ■3 ☐4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt)

☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ankreuzen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Aufgabe 2 (3 Punkte) □0 □1 □2 ■3

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3+3x-3x^2}{2-\sqrt{2}x+7x^2}$	$\sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{2^k}{k!}$	$\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-25}{\ln(x-4)}$
$-\dfrac{3}{7}$	e^2-3	10

Aufgabe 3 (3 Punkte) □0 □1 □2 ■3

Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \left(0,\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{-\sqrt{3}x}{\tan(x)}.$$

Berechnen Sie die erste Ableitung von f.

$$f'(x) = \boxed{-\sqrt{3}\left(\frac{\tan(x)-\dfrac{x}{(\cos(x))^2}}{(\tan(x))^2}\right)}$$

Stellen Sie das Taylorpolynom $T_1\left(f,x,\frac{\pi}{6}\right)$ der Stufe 1 um den Entwicklungspunkt $\frac{\pi}{6}$ auf.

$$T_1\left(f,x,\frac{\pi}{6}\right) = \boxed{-\frac{\pi}{2}+\left(-3+\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right)\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}$$

Aufgabe 4 (3 Punkte) □0 □1 □2 ■3

Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x \mapsto x\,|x-1|-2x.$$

Bestimmen Sie zu $x_0 = 1$ die folgenden Grenzwerte.

$$\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \boxed{-1} \qquad \lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \boxed{-3}$$

Für welche $x\in\mathbb{R}$ ist f differenzierbar? $\boxed{x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}}$

Aufgabe 5 (4 Punkte) □0 □1 □2 □3 ■4

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$\int x^2\ln(x)\,\mathrm{d}\,x$	$\left[\frac{1}{3}x^3\ln(x)-\frac{1}{9}x^3\right]$
$\int_0^1 x^2\ln(x)\,\mathrm{d}\,x$	$-\frac{1}{9}$
$\int \mathrm{e}^{2x}\sin\left(\mathrm{e}^{2x}\right)\mathrm{d}\,x$	$\left[-\frac{1}{2}\cos\left(\mathrm{e}^{2x}\right)\right]$
$\int_0^{\frac{1}{2}\ln(2\pi)} \mathrm{e}^{2x}\sin\left(\mathrm{e}^{2x}\right)\mathrm{d}\,x$	$-\frac{1}{2}(1-\cos(1))$

Aufgabe 6 (5 Punkte) □0 □1 □2 □3 □4 ■5

Führen Sie nach Polynomdivision die Partialbruchzerlegung durch:

$$\frac{2x^3+x^2+13x+6}{x(x^2+6)} = \boxed{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2+6}}$$

Berechnen Sie das unbestimmte Integral:

$$\int\frac{2x^3+x^2+13x+6}{x(x^2+6)}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[2x+\ln|x|+\frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{6}}\right)\right]}$$

Aufgabe 7 (2 Punkte) □0 □1 ■2

Gegeben seien die Funktionen

$$f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2\colon(x_1,x_2,x_3)\mapsto\begin{pmatrix}x_1x_3\\ x_2\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\colon(y_1,y_2)\mapsto\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{y_1y_2}\\ \mathrm{e}^{y_2}\end{pmatrix}.$$

Weiterhin sei $h\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2\colon x\mapsto(g\circ f)(x)$. Berechnen Sie die Jacobi-Matrix der Funktion h.

$$\mathrm{J}h\,(x_1,x_2,x_3) = \boxed{\begin{pmatrix} x_2x_3\cdot\mathrm{e}^{x_1x_2x_3} & x_1x_3\cdot\mathrm{e}^{x_1x_2x_3} & x_1x_2\cdot\mathrm{e}^{x_1x_2x_3}\\ 0 & \mathrm{e}^{x_2} & 0\end{pmatrix}}$$

Aufgabe 8 (4 Punkte)

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z-7\mathrm{i}}{7}\right)^k$	$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{7}+(-1)^n\right)^n \left(z+\sqrt{3}\right)^n$	$\sum_{j=2}^{\infty} 3^j \left(\frac{1}{5}z - 2\mathrm{i} + 1\right)^j$
z_0	$7\mathrm{i}$	$-\sqrt{3}$	$-5+10\mathrm{i}$
ρ	7	$\frac{1}{\sqrt{7}+1}$	$\frac{5}{3}$

Aufgabe 9 (6 Punkte)

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Für Konstanten $a, b, c, t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ ist die Parametrisierung

$$C\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ at^2 + bt + c \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Für $a = 0$ parametrisiert C eine Strecke. Bestimmen Sie die Konstanten t_0, t_1, b, c so, dass C die Strecke von $\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ parametrisiert.

$t_0 = \boxed{-3}$ $t_1 = \boxed{-2}$ $b = \boxed{-1}$ $c = \boxed{3}$

(b) Bestimmen Sie die Konstanten t_0, t_1, a, b, c so, dass C die Parabel von $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ über $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ parametrisiert.

$t_0 = \boxed{-4}$ $t_1 = \boxed{0}$ $a = \boxed{-1}$ $b = \boxed{-4}$ $c = \boxed{1}$

(c) Bestimmen Sie ein Potential U zum Vektorfeld

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 \\ -2x_2 \end{pmatrix}.$$

$U(x_1, x_2) = \boxed{x_1^2 - x_2^2}$

Berechnen Sie für die Parabel aus **(b)**

$$\int_{t_0}^{t_1} g(C(t)) \bullet C'(t)\,\mathrm{d}\,t = \boxed{-16}$$

Scheinklausur **Höhere Mathematik 2** **18. 7. 2015**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

☐1 ☐2 ☐2 ■4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\left(\cos(x)\right)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt)

☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ankreuzen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4-3x+2x^2}{1+\sqrt{2}x-5x^2}$	$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{3^{k+2}}{k!}$	$\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{x^2-36}{\ln(x-5)}$
$-\dfrac{2}{5}$	$9e^3-9$	12

Aufgabe 3 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \left(0,\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{-3x}{\tan(x)}.$$

Berechnen Sie die erste Ableitung von f.

$$f'(x) = -3\left(\frac{\tan(x)-\dfrac{x}{(\cos(x))^2}}{(\tan(x))^2}\right)$$

Stellen Sie das Taylorpolynom $T_1\left(f,x,\frac{\pi}{3}\right)$ der Stufe 1 um den Entwicklungspunkt $\frac{\pi}{3}$ auf.

$$T_1\left(f,x,\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \left(-\sqrt{3}+\frac{4\pi}{3}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

Aufgabe 4 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x \mapsto x\,|x+2| - 3x.$$

Bestimmen Sie zu $x_0 = -2$ die folgenden Grenzwerte.

$$\lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -5 \qquad \lim_{x\to x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -1$$

Für welche $x\in\mathbb{R}$ ist f differenzierbar? $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Aufgabe 5 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$\int x^3 \ln(x)\,\mathrm{d}\,x$	$\left[\frac{1}{4}x^4\ln(x) - \frac{1}{16}x^4\right]$
$\int_0^1 x^3\ln(x)\,\mathrm{d}\,x$	$-\frac{1}{16}$
$\int e^{2x}\cos\left(e^{2x}\right)\mathrm{d}\,x$	$\left[\frac{1}{2}\sin\left(e^{2x}\right)\right]$
$\int_0^{\frac{1}{2}\ln(2\pi)} e^{2x}\cos\left(e^{2x}\right)\mathrm{d}\,x$	$-\frac{1}{2}\sin(1)$

Aufgabe 6 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Führen Sie nach Polynomdivision die Partialbruchzerlegung durch:

$$\frac{2x^3+2x^2+11x+10}{x(x^2+5)} = 2+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2+5}$$

Berechnen Sie das unbestimmte Integral:

$$\int \frac{2x^3+2x^2+11x+10}{x(x^2+5)}\,\mathrm{d}\,x = \left[2x+2\ln|x|+\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)\right]$$

Aufgabe 7 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ■2

Gegeben seien die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2\colon (x_1,x_2,x_3)\mapsto \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\colon (y_1,y_2)\mapsto \begin{pmatrix} e^{y_2} \\ e^{y_1y_2} \end{pmatrix}.$$

Weiterhin sei $h\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2\colon x\mapsto (g\circ f)(x)$. Berechnen Sie die Jacobi-Matrix der Funktion h.

$$\mathrm{J}h(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{x_3} \\ x_2x_3\cdot e^{x_1x_2x_3} & x_1x_3\cdot e^{x_1x_2x_3} & x_1x_2\cdot e^{x_1x_2x_3} \end{pmatrix}$$