Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studiengang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/3	/3	/7	/3	/5	/3	/6	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Funktionswerte könnten hilfreich sein.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: $\boxed{}$ **Gruppennr.:** $\boxed{}$

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Gegeben ist die komplexe Zahl

$$z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\mathrm{i}.$$

Geben Sie die Polarkoordinatendarstellung $r \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ mit $0 \leqq r$ und $0 \leqq \varphi < 2\pi$ für die folgenden komplexen Zahlen an:

$$z = \boxed{} \cdot \left(\cos \boxed{} + \mathrm{i}\sin \boxed{}\right)$$

$$\frac{z^{11}}{2^6} = \boxed{} \cdot \left(\cos \boxed{} + \mathrm{i}\sin \boxed{}\right)$$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Gegeben ist die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 12 & 3 & -7 & 9 \\ 7 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Determinante der Matrizen M, M^2 und $2M$:

$$\det(M) = \boxed{} \qquad \det\left(M^2\right) = \boxed{} \qquad \det(2M) = \boxed{}$$

Aufgabe 4 (*7 Punkte*) Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 25 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

alle Eigenwerte

$$\lambda_1 = \boxed{} \qquad \lambda_2 = \boxed{} \qquad \lambda_3 = \boxed{}$$

und die dazugehörigen Eigenräume

$$V(\lambda_1) = \boxed{} \qquad V(\lambda_2) = \boxed{} \qquad V(\lambda_3) = \boxed{}.$$

Geben Sie eine Transformationsmatrix T und die dazugehörige Diagonalmatrix D so an, dass $D = T^{-1}AT$.

$$T = \boxed{} \qquad D = \boxed{}.$$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) In der Ebene $\mathbb{R}^2$ sind zwei Koordinatensysteme gegeben: Das Standard-Koordinatensystem $\mathbb{E}$ und das Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Bestimmen Sie die Koordinatentransformation

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}\left({}_{\mathbb{F}}X\right) = \boxed{} \cdot {}_{\mathbb{F}}X + \boxed{}$$

sowie die inverse Transformation

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\left({}_{\mathbb{E}}X\right) = \boxed{} \cdot {}_{\mathbb{E}}X + \boxed{}.$$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Die reellen Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind gegeben durch

$$x_n = 12 + (-1)^n \frac{4}{n} \quad \text{und} \quad y_n = \frac{7n^2 + 14n + 3}{(n+1)^2}.$$

Bestimmen Sie eine reelle obere Schranke für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\boxed{}$

Bestimmen Sie eine reelle untere Schranke für $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\boxed{}$

Geben Sie eine reelle Zahl an, die sowohl eine untere Schranke für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als auch eine obere Schranke für $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist: $\boxed{}$

Bestimmen Sie, falls existent, die Summen der folgenden Reihen. Falls eine Reihe nicht konvergiert, tragen Sie „divergent“ ein.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^k = \boxed{} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{2k+1} = \boxed{}$$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*)

Die Ebene E in $\mathbb{R}^3$ hat die Parameterdarstellung

$$E = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Hessesche Normalform $\langle n | x \rangle = d$ der Ebene E:

$n = \boxed{}$ und $d = \boxed{}$.

Aufgabe 8 (*6 Punkte*)

Gegeben ist die Quadrik $Q = \left\{ (x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 6x_1^2 - 6x_1x_2 + 6x_2^2 - 18 = 0 \right\}$.

Die Matrixbeschreibung der Quadrik ist definiert durch $Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^\intercal A x + 2a^\intercal x + c = 0 \right\}$, wobei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ symmetrisch, $a \in \mathbb{R}^2$ und $c \in \mathbb{R}$. Geben Sie A, a und c an:

$A = \boxed{}$ $a = \boxed{}$ $c = \boxed{}$

Berechnen Sie die Eigenwerte λ_1 und λ_2 von A:

$\lambda_1 = \boxed{}$ $\lambda_2 = \boxed{}$

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q und die Gestalt von Q:

euklidische Normalform : $\boxed{}$ Gestalt : $\boxed{}$

Geben Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F}$ in Bezug auf das Standard-Koordinatensystem $\mathbb{E}$ an, in welchem Q in dieser euklidischen Normalform vorliegt:

$\boxed{}$

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studiengang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/3	/3	/7	/3	/5	/3	/6	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Funktionswerte könnten hilfreich sein.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Gegeben ist die komplexe Zahl

$$z = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\mathrm{i}.$$

Geben Sie die Polarkoordinatendarstellung $r \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ mit $0 \leqq r$ und $0 \leqq \varphi < 2\pi$ für die folgenden komplexen Zahlen an:

$$z = \boxed{} \cdot \left(\cos \boxed{} + \mathrm{i}\sin \boxed{}\right)$$

$$\frac{z^7}{4^5} = \boxed{} \cdot \left(\cos \boxed{} + \mathrm{i}\sin \boxed{}\right)$$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Gegeben ist die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 17 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Determinante der Matrizen M, M^2 und $2M$:

$$\det(M) = \boxed{} \qquad \det\left(M^2\right) = \boxed{} \qquad \det(2M) = \boxed{}$$

Aufgabe 4 (*7 Punkte*) Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

alle Eigenwerte

$$\lambda_1 = \boxed{} \qquad \lambda_2 = \boxed{} \qquad \lambda_3 = \boxed{}$$

und die dazugehörigen Eigenräume

$$V(\lambda_1) = \boxed{} \qquad V(\lambda_2) = \boxed{} \qquad V(\lambda_3) = \boxed{}.$$

Geben Sie eine Transformationsmatrix T und die dazugehörige Diagonalmatrix D so an, dass $D = T^{-1}AT$.

$$T = \boxed{} \qquad D = \boxed{}.$$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) In der Ebene $\mathbb{R}^2$ sind zwei Koordinatensysteme gegeben: Das Standard-Koordinatensystem $\mathbb{E}$ und das Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \right).$$

Bestimmen Sie die Koordinatentransformation

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}\left({}_{\mathbb{F}}X\right) = \boxed{} \cdot {}_{\mathbb{F}}X + \boxed{}$$

sowie die inverse Transformation

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\left({}_{\mathbb{E}}X\right) = \boxed{} \cdot {}_{\mathbb{E}}X + \boxed{}.$$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Die reellen Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind gegeben durch

$$x_n = 6 + (-1)^n \frac{2}{n} \quad \text{und} \quad y_n = \frac{3n^2 + 6n - 1}{(n+1)^2}.$$

Bestimmen Sie eine reelle obere Schranke für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\boxed{}$

Bestimmen Sie eine reelle untere Schranke für $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\boxed{}$

Geben Sie eine reelle Zahl an, die sowohl eine untere Schranke für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als auch eine obere Schranke für $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist: $\boxed{}$

Bestimmen Sie, falls existent, die Summen der folgenden Reihen. Falls eine Reihe nicht konvergiert, tragen Sie „divergent" ein.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^k = \boxed{} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{2k+1} = \boxed{}$$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*)

Die Ebene E in $\mathbb{R}^3$ hat die Parameterdarstellung

$$E = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Hessesche Normalform $\langle n|x\rangle = d$ der Ebene E:

$n = \boxed{}$ und $d = \boxed{}$.

Aufgabe 8 (*6 Punkte*)

Gegeben ist die Quadrik $Q = \left\{ (x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 7x_1^2 - 4x_1x_2 + 7x_2^2 - 45 = 0 \right\}$.

Die Matrixbeschreibung der Quadrik ist definiert durch $Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0 \right\}$, wobei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ symmetrisch, $a \in \mathbb{R}^2$ und $c \in \mathbb{R}$. Geben Sie A, a und c an:

$A = \boxed{}$ $a = \boxed{}$ $c = \boxed{}$

Berechnen Sie die Eigenwerte λ_1 und λ_2 von A:

$\lambda_1 = \boxed{}$ $\lambda_2 = \boxed{}$

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q und die Gestalt von Q:

euklidische Normalform : $\boxed{}$ Gestalt : $\boxed{}$

Geben Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F}$ in Bezug auf das Standard-Koordinatensystem $\mathbb{E}$ an, in welchem Q in dieser euklidischen Normalform vorliegt:

$\boxed{}$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/3	/3	/7	/3	/5	/3	/6	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Funktionswerte könnten hilfreich sein.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: $\boxed{}$ **Gruppennr.:** $\boxed{}$

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Gegeben ist die komplexe Zahl

$$z = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\mathrm{i}.$$

Geben Sie die Polarkoordinatendarstellung $r \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ mit $0 \leqq r$ und $0 \leqq \varphi < 2\pi$ für die folgenden komplexen Zahlen an:

$$z = \boxed{} \cdot \left(\cos \boxed{} + \mathrm{i}\sin \boxed{}\right)$$

$$\frac{z^{11}}{2^8} = \boxed{} \cdot \left(\cos \boxed{} + \mathrm{i}\sin \boxed{}\right)$$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Gegeben ist die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ -11 & 2 & 9 & -16 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Determinante der Matrizen M, M^2 und $3M$:

$\det(M) = \boxed{}$ $\det\left(M^2\right) = \boxed{}$ $\det(3M) = \boxed{}$

Aufgabe 4 (*7 Punkte*) Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 16 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

alle Eigenwerte

$\lambda_1 = \boxed{}$ $\lambda_2 = \boxed{}$ $\lambda_3 = \boxed{}$

und die dazugehörigen Eigenräume

$V(\lambda_1) = \boxed{}$ $V(\lambda_2) = \boxed{}$ $V(\lambda_3) = \boxed{}$.

Geben Sie eine Transformationsmatrix T und die dazugehörige Diagonalmatrix D so an, dass $D = T^{-1}AT$.

$T = \boxed{}$ $D = \boxed{}$.

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) In der Ebene $\mathbb{R}^2$ sind zwei Koordinatensysteme gegeben: Das Standard-Koordinatensystem $\mathbb{E}$ und das Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} \right).$$

Bestimmen Sie die Koordinatentransformation

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \left({}_{\mathbb{F}}X \right) = \boxed{} \cdot {}_{\mathbb{F}}X + \boxed{}$$

sowie die inverse Transformation

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} \left({}_{\mathbb{E}}X \right) = \boxed{} \cdot {}_{\mathbb{E}}X + \boxed{}.$$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Die reellen Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind gegeben durch

$$x_n = 11 + (-1)^n \frac{4}{n} \quad \text{und} \quad y_n = \frac{6n^2 + 12n + 2}{(n+1)^2}.$$

Bestimmen Sie eine reelle obere Schranke für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\boxed{}$

Bestimmen Sie eine reelle untere Schranke für $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\boxed{}$

Geben Sie eine reelle Zahl an, die sowohl eine untere Schranke für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als auch eine obere Schranke für $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist: $\boxed{}$

Bestimmen Sie, falls existent, die Summen der folgenden Reihen. Falls eine Reihe nicht konvergiert, tragen Sie „divergent“ ein.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{5} \right)^k = \boxed{} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6} \right)^{2k+1} = \boxed{}$$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*)

Die Ebene E in $\mathbb{R}^3$ hat die Parameterdarstellung

$$E = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Hessesche Normalform $\langle n|x\rangle = d$ der Ebene E:

$$n = \boxed{} \quad \text{und} \quad d = \boxed{}.$$

Aufgabe 8 (*6 Punkte*)

Gegeben ist die Quadrik $Q = \left\{ (x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 8x_1^2 - 2x_1x_2 + 8x_2^2 - 63 = 0 \right\}$.

Die Matrixbeschreibung der Quadrik ist definiert durch $Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^\intercal A x + 2a^\intercal x + c = 0 \right\}$, wobei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ symmetrisch, $a \in \mathbb{R}^2$ und $c \in \mathbb{R}$. Geben Sie A, a und c an:

$$A = \boxed{} \qquad a = \boxed{} \qquad c = \boxed{}$$

Berechnen Sie die Eigenwerte λ_1 und λ_2 von A:

$$\lambda_1 = \boxed{} \qquad \lambda_2 = \boxed{}$$

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q und die Gestalt von Q:

euklidische Normalform : $\boxed{}$ Gestalt : $\boxed{}$

Geben Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F}$ in Bezug auf das Standard-Koordinatensystem $\mathbb{E}$ an, in welchem Q in dieser euklidischen Normalform vorliegt:

$$\boxed{}$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte	/1	/3	/3	/7	/3	/5	/3	/6	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Funktionswerte könnten hilfreich sein.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: $\boxed{}$ **Gruppennr.:** $\boxed{}$

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Gegeben ist die komplexe Zahl

$$z = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\mathrm{i}.$$

Geben Sie die Polarkoordinatendarstellung $r \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ mit $0 \leqq r$ und $0 \leqq \varphi < 2\pi$ für die folgenden komplexen Zahlen an:

$$z = \boxed{} \cdot \left(\cos\boxed{} + \mathrm{i}\sin\boxed{}\right)$$

$$\frac{z^7}{4^4} = \boxed{} \cdot \left(\cos\boxed{} + \mathrm{i}\sin\boxed{}\right)$$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Gegeben ist die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -13 & 6 \\ 2 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Determinante der Matrizen M, M^2 und $2M$:

$$\det(M) = \boxed{} \qquad \det\left(M^2\right) = \boxed{} \qquad \det(2M) = \boxed{}$$

Aufgabe 4 (*7 Punkte*) Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 36 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

alle Eigenwerte

$$\lambda_1 = \boxed{} \qquad \lambda_2 = \boxed{} \qquad \lambda_3 = \boxed{}$$

und die dazugehörigen Eigenräume

$$V(\lambda_1) = \boxed{} \qquad V(\lambda_2) = \boxed{} \qquad V(\lambda_3) = \boxed{}.$$

Geben Sie eine Transformationsmatrix T und die dazugehörige Diagonalmatrix D so an, dass $D = T^{-1}AT$.

$$T = \boxed{} \qquad D = \boxed{}.$$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) In der Ebene $\mathbb{R}^2$ sind zwei Koordinatensysteme gegeben: Das Standard-Koordinatensystem $\mathbb{E}$ und das Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 14 \\ 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Bestimmen Sie die Koordinatentransformation

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}\left({}_{\mathbb{F}}X\right) = \boxed{} \cdot {}_{\mathbb{F}}X + \boxed{}$$

sowie die inverse Transformation

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\left({}_{\mathbb{E}}X\right) = \boxed{} \cdot {}_{\mathbb{E}}X + \boxed{}.$$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Die reellen Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind gegeben durch

$$x_n = 8 + (-1)^n \frac{2}{n} \quad \text{und} \quad y_n = \frac{5n^2 + 10n + 1}{(n+1)^2}.$$

Bestimmen Sie eine reelle obere Schranke für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\boxed{}$

Bestimmen Sie eine reelle untere Schranke für $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\boxed{}$

Geben Sie eine reelle Zahl an, die sowohl eine untere Schranke für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als auch eine obere Schranke für $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist: $\boxed{}$

Bestimmen Sie, falls existent, die Summen der folgenden Reihen. Falls eine Reihe nicht konvergiert, tragen Sie „divergent“ ein.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^k = \boxed{} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^{2k+1} = \boxed{}$$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*)

Die Ebene E in $\mathbb{R}^3$ hat die Parameterdarstellung

$$E = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Hessesche Normalform $\langle n | x \rangle = d$ der Ebene E:

$$n = \boxed{} \quad \text{und} \quad d = \boxed{}.$$

Aufgabe 8 (*6 Punkte*)

Gegeben ist die Quadrik $Q = \left\{ (x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 5x_1^2 - 8x_1x_2 + 5x_2^2 - 18 = 0 \right\}$.

Die Matrixbeschreibung der Quadrik ist definiert durch $Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0 \right\}$, wobei $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$ symmetrisch, $a \in \mathbb{R}^2$ und $c \in \mathbb{R}$. Geben Sie A, a und c an:

$$A = \boxed{} \qquad a = \boxed{} \qquad c = \boxed{}$$

Berechnen Sie die Eigenwerte λ_1 und λ_2 von A:

$$\lambda_1 = \boxed{} \qquad \lambda_2 = \boxed{}$$

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q und die Gestalt von Q:

euklidische Normalform : $\boxed{}$ Gestalt : $\boxed{}$

Geben Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F}$ in Bezug auf das Standard-Koordinatensystem $\mathbb{E}$ an, in welchem Q in dieser euklidischen Normalform vorliegt:

$\boxed{}$
