



Aufgabe 7 (3 Punkte)

0 1 2 3

Sei $f: (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) 2^{2k+1} x^k$ gegeben.

(a) Geben Sie eine Reihendarstellung der Stammfunktion F von f mit $F(0) = 0$ an.

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n-1} x^n$$

(b) Stellen Sie $F(x)$ und $f(x)$ jeweils in geschlossener Form dar.

$$F(x) = \frac{2x}{1-4x}, \quad f(x) = \frac{2}{(1-4x)^2}$$

Aufgabe 8 (3 Punkte)

0 1 2 3

Sei K der Kreis mit Mittelpunkt $M = (1, 0)$ und Radius 2, und sei

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie eine Parametrisierung C von K an.

$$C: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto \begin{pmatrix} 1 + 2 \cos(t) \\ 2 \sin(t) \end{pmatrix}$$

(b) Geben Sie für $t \in [0, 2\pi]$ einen Vektor an, der zu $C'(t)$ orthogonal ist und dieselbe Länge wie $C'(t)$ hat.

$$\begin{pmatrix} 2 \cos(t) \\ 2 \sin(t) \end{pmatrix}$$

(c) Berechnen Sie den Ausfluss von g durch K .

$$A(g, K) = 4\pi$$

Schein-Nachklausur

Höhere Mathematik 2

24. 7. 2015

Beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln x $	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b) b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt)

0 1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Matrikelnummer:

Gruppe:

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Aufgabe 2 (4 Punkte)

0 1 2 3 4

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x + \sin(x)}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\pi)^n}{n!}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{2x}$	$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}} dx$
$\frac{1}{2}$	-1	e^2	2

Aufgabe 3 (4 Punkte)

0 1 2 3 4

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \ln(x^2 + 2)$.

(a) Bestimmen Sie die ersten beiden Ableitungen von f .

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 2}, \quad f''(x) = \frac{4 - 2x^2}{(x^2 + 2)^2}$$

(b) Geben Sie für f das Taylorpolynom der Stufe 2 um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ an.

$$T_2(f, x, 1) = \ln(3) + \frac{2}{3}(x - 1) + \frac{1}{9}(x - 1)^2$$

(c) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $|T_1(f, x, 1) - T_2(f, x, 1)|$ kleiner als $\frac{1}{100}$?

$$x \in \left(\frac{7}{10}, \frac{13}{10}\right)$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

0 1 2 3 4

Bestimmen Sie für jede der folgenden Funktionen Lage und Wert ihres globalen Maximums.

Funktion	Maximum bei	Wert des Maximums
$f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^3 - 3x^2 + 6x - 1$	$x = 2$	7
$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \int_3^x (3 - t)e^{2t} dt$	$x = 3$	0

Aufgabe 5 (4 Punkte)

0 1 2 3 4

Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + x^4} = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{1 + x^2}$$

Berechnen Sie das unbestimmte Integral:

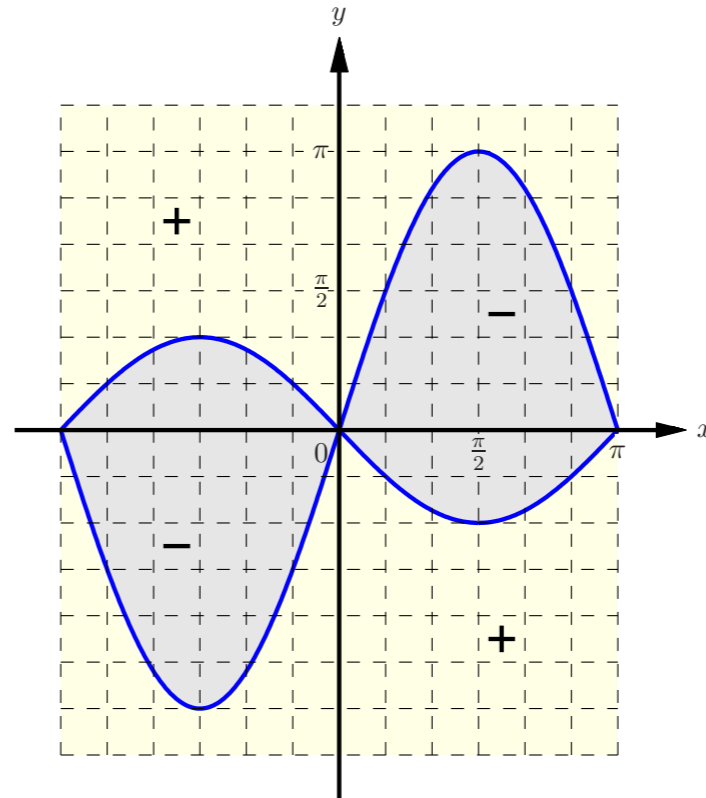
$$\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + x^4} dx = \left[\frac{1}{x} + 2 \arctan(x) \right]$$

Aufgabe 6 (8 Punkte)

0 1 2 3 4 5 6 7 8

Sei $f: (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto (y - \pi \sin(x))(3y + \pi \sin(x))$ gegeben.

(a) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge und Vorzeichenverteilung von f .



(b) Berechnen Sie den Gradienten von f .

$$\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} -2\pi \cos(x)(y + \pi \sin(x)) \\ 6y - 2\pi \sin(x) \end{pmatrix}$$

(c) Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen von f und geben Sie jeweils an, um welchen Typ von Extremum es sich handelt.

Extremalstelle	Typ
$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$	lokales Minimum
$\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right)$	lokales Minimum