

**Aufgabe 7** (5 Punkte)

0 1 2 3 4 5

Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$  ein reeller Parameter. Im Vektorraum  $\text{Pol}_2 \mathbb{R}$  der reellen Polynome vom Grad höchstens 2 seien die Vektoren  $g_\alpha(X)$ ,  $h_\alpha(X)$  und  $k(X)$  wie folgt gegeben:

$$g_\alpha(X) = 2X^2 + X + \alpha, \quad h_\alpha(X) = \alpha X^2 + X + 2, \quad k(X) = X^2 + X + 1.$$

(a) Für welche Werte von  $\alpha$  sind die Vektoren  $g_\alpha(X)$ ,  $h_\alpha(X)$  und  $k(X)$  linear abhängig?

$$\alpha \in \boxed{\{0,2\}}$$

(b) Stellen Sie den Vektor  $q(X) = 6X^2 + 7X + 3$  als Linearkombination von  $g_{-1}(X)$ ,  $h_{-1}(X)$  und  $k(X)$  dar.

$$q(X) = \boxed{3} \cdot g_{-1}(X) + \boxed{2} \cdot h_{-1}(X) + \boxed{2} \cdot k(X)$$

**Aufgabe 8** (5 Punkte)

0 1 2 3 4 5

Gegeben seien

$$A := \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Bestimmen Sie die folgenden Determinanten:

$$\det(A) = \boxed{-5}, \quad \det(2A) = \boxed{-20}, \quad \det(A + E_2) = \boxed{10}.$$

(b) Bestimmen Sie die Inverse von  $A$ :

$$A^{-1} = \boxed{\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -7 & 9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}}$$

(c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge  $\mathcal{L}$  des Gleichungssystems  $Ax = b$ .

$$\mathcal{L} = \boxed{\left\{ \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 28 \\ -19 \end{pmatrix} \right\}}$$

**Scheinklausur**

**Höhere Mathematik 1**

12.12.2015

Beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

1 2 3 4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

*Viel Erfolg!*

**Aufgabe 1** (1 Punkt)

0 1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

**Matrikelnummer:**

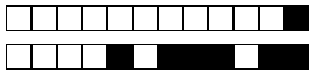
**Gruppe:**

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

**Name, Vorname:**

---

**Matrikelnummer:**



**Aufgabe 2** (4 Punkte)

0  1  2  3  4

Gegeben sind die Punkte  $P = (1, 0, 2)$ ,  $Q = (-1, 0, 1)$  und  $R = (1, -1, 1)$ .

Bestimmen Sie  $\vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene  $E$  welche die Punkte  $P$ ,  $Q$  und  $R$  enthält.

$-\frac{1}{3} x_1 + -\frac{2}{3} x_2 + \frac{2}{3} x_3 = 1$

Jetzt sei zusätzlich der Punkt  $S = (-3, -3, 0)$  gegeben. Bestimmen Sie den Abstand  $a$  von  $S$  zu  $E$ :

$a = 2$

**Aufgabe 3** (5 Punkte)

0  1  2  3  4  5

(a) Sei  $z = a + ib$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ . Berechnen Sie

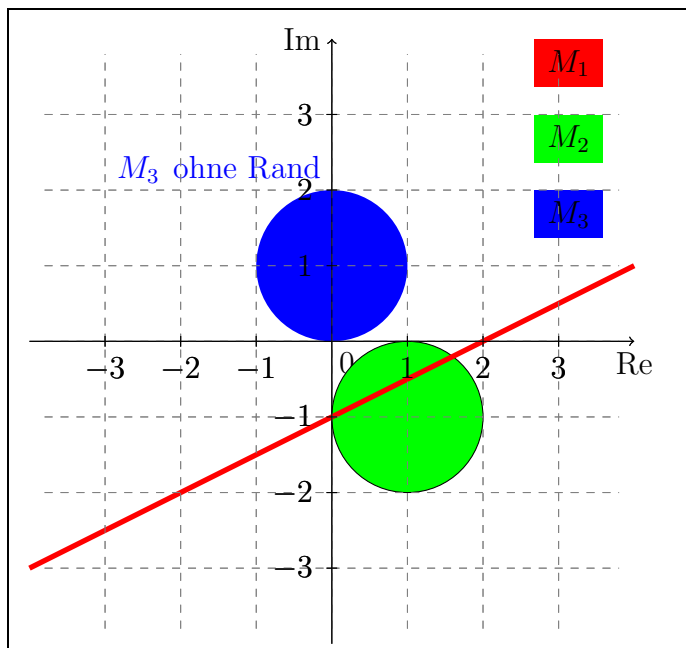
$i\bar{z}z + \bar{z} - z = i(a^2 + b^2 - 2b)$

(b) Skizzieren Sie die Mengen

$M_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) - \frac{1}{2} \text{Re}(z) + 1 = 0 \right\}$ ,  $M_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - 1 + i| \leq 1 \right\}$ ,

$M_3 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(i\bar{z}z + \bar{z} - z) < 0 \right\}$

in der komplexen Zahlenebene.



**Aufgabe 4** (3 Punkte)

0  1  2  3

Im Vektorraum  $\mathbb{R}^4$  seien  $u = (-3, -1, 2, 0)^T$  und  $v = (0, 2, -4, 3)^T$  gegeben. Berechnen Sie

$|u| = \sqrt{14}$  und  $\langle u | v \rangle = -10$ .

Geben Sie einen Vektor  $w \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$  so an, dass  $w$  auf  $L(u, v)$  senkrecht steht:

$w = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

**Aufgabe 5** (4 Punkte)

0  1  2  3  4

Die komplexen Zahlen  $w_0 = \sqrt{3} + i$ ,  $w_1 = -\sqrt{3} + i$  und  $w_2 = -2i$  sind Lösungen der Gleichung  $w^3 = z$ . Die Menge der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Basis  $B: 1, i$ .

(a) Sei die  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch  $f(w_0) = w_1$  und  $f(w_1) = w_2$ .

Bestimmen Sie die Matrix  ${}_B f_B$ .

${}_B f_B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$

(b) Geben Sie  $w_1$  in Polarkoordinaten an.  $w_1 = 2 \left( \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right)$

(c) Bestimmen Sie  $z$ .  $z = 8i$

**Aufgabe 6** (4 Punkte)

0  1  2  3  4

Es seien die Abbildungen

$f_1: \mathbb{C} \rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}: z \mapsto z\bar{z} - 1$

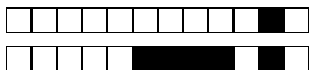
$f_2: \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid 0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{2} \right\} \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto z \left( \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$

$f_3: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto -\text{Im}(z) + i \text{Re}(z)$

$f_4: \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto (x - 2)^2 - 1$

gegeben. Prüfen Sie diese auf Injektivität und Surjektivität. Tragen Sie „Ja“ oder „Nein“ ein.

	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
injektiv	Nein	Ja	Ja	Ja
surjektiv	Ja	Nein	Ja	Nein



**Aufgabe 7** (5 Punkte)

0  1  2  3  4  5

Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$  ein reeller Parameter. Im Vektorraum  $\text{Pol}_2 \mathbb{R}$  der reellen Polynome vom Grad höchstens 2 seien die Vektoren  $g_\alpha(X)$ ,  $h_\alpha(X)$  und  $k(X)$  wie folgt gegeben:

$$g_\alpha(X) = \alpha X^2 + 2X + 1, \quad h_\alpha(X) = X^2 + \alpha, \quad k(X) = X^2 + 2X + 1.$$

(a) Für welche Werte von  $\alpha$  sind die Vektoren  $g_\alpha(X)$ ,  $h_\alpha(X)$  und  $k(X)$  linear abhängig?

$$\alpha \in \boxed{\{0,1\}}$$

(b) Stellen Sie den Vektor  $q(X) = 4X + \frac{3}{2}$  als Linearkombination von  $g_{-1}(X)$ ,  $h_{-1}(X)$  und  $k(X)$  dar.

$$q(X) = \boxed{\frac{5}{4}} \cdot g_{-1}(X) + \boxed{\frac{1}{2}} \cdot h_{-1}(X) + \boxed{\frac{3}{4}} \cdot k(X)$$

**Aufgabe 8** (5 Punkte)

0  1  2  3  4  5

Gegeben seien

$$A := \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Bestimmen Sie die folgenden Determinanten:

$$\det(A) = \boxed{-6}, \quad \det(2A) = \boxed{-24}, \quad \det(A + E_2) = \boxed{8}.$$

(b) Bestimmen Sie die Inverse von  $A$ :

$$A^{-1} = \boxed{\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}}$$

(c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge  $\mathcal{L}$  des Gleichungssystems  $Ax = b$ .

$$\mathcal{L} = \boxed{\left\{ \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}}$$

**Scheinklausur**

**Höhere Mathematik 1**

12.12.2015

Beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

1  2  3  4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

*Viel Erfolg!*

**Aufgabe 1** (1 Punkt)

0  1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

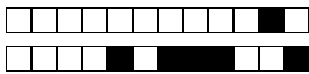
Matrikelnummer:

Gruppe:

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

**Name, Vorname:**

**Matrikelnummer:**



**Aufgabe 2** (4 Punkte)

0  1  2  3  4

Gegeben sind die Punkte  $P = (0, 2, 1)$ ,  $Q = (0, 1, -1)$  und  $R = (-1, 1, 1)$ .

Bestimmen Sie  $\vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene  $E$  welche die Punkte  $P$ ,  $Q$  und  $R$  enthält.

$-\frac{2}{3} x_1 + \frac{2}{3} x_2 - \frac{1}{3} x_3 = 1$

Jetzt sei zusätzlich der Punkt  $S = (-1, 2, 0)$  gegeben. Bestimmen Sie den Abstand  $a$  von  $S$  zu  $E$ :

$a = 1$

**Aufgabe 3** (5 Punkte)

0  1  2  3  4  5

(a) Sei  $z = a + ib$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ . Berechnen Sie

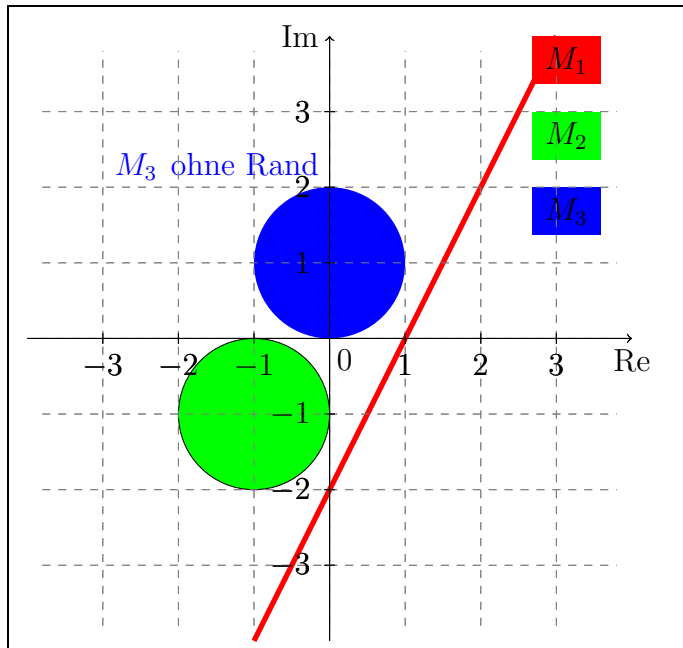
$2i\bar{z}z + 2\bar{z} - 2z = 2i(a^2 + b^2 - 2b)$

(b) Skizzieren Sie die Mengen

$M_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) - 2\text{Re}(z) + 2 = 0\}$ ,  $M_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 1 + i| \leq 1\}$ ,

$M_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(2i\bar{z}z + 2\bar{z} - 2z) < 0\}$

in der komplexen Zahlenebene.



**Aufgabe 4** (3 Punkte)

0  1  2  3

Im Vektorraum  $\mathbb{R}^4$  seien  $u = (1, -2, 0, 3)^T$  und  $v = (2, -4, 3, 0)^T$  gegeben. Berechnen Sie

$|u| = \sqrt{14}$  und  $\langle u | v \rangle = 10$ .

Geben Sie einen Vektor  $w \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$  so an, dass  $w$  auf  $L(u, v)$  senkrecht steht:

$w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

**Aufgabe 5** (4 Punkte)

0  1  2  3  4

Die komplexen Zahlen  $w_0 = -\sqrt{3} - i$ ,  $w_1 = \sqrt{3} - i$  und  $w_2 = 2i$  sind Lösungen der Gleichung  $w^3 = z$ . Die Menge der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Basis  $B: 1, i$ .

(a) Sei die  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch  $f(w_0) = w_1$  und  $f(w_1) = w_2$ .

Bestimmen Sie die Matrix  ${}_B f_B$ .

${}_B f_B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$

(b) Geben Sie  $w_1$  in Polarkoordinaten an.  $w_1 = 2(\cos(\frac{11\pi}{6}) + i \sin(\frac{11\pi}{6}))$

(c) Bestimmen Sie  $z$ .  $z = -8i$

**Aufgabe 6** (4 Punkte)

0  1  2  3  4

Es seien die Abbildungen

$f_1: \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \pi\} \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto z \left( \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$

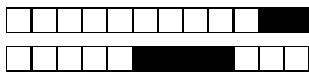
$f_2: \mathbb{C} \rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}: z \mapsto z\bar{z} - 2$

$f_3: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto \text{Im}(z) - i \text{Re}(z)$

$f_4: \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto (x - 4)^2 - 1$

gegeben. Prüfen Sie diese auf Injektivität und Surjektivität. Tragen Sie „Ja“ oder „Nein“ ein.

	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
injektiv	Ja	Nein	Ja	Ja
surjektiv	Nein	Ja	Ja	Nein



**Aufgabe 7** (5 Punkte)

 0  1  2  3  4  5

Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$  ein reeller Parameter. Im Vektorraum  $\text{Pol}_2 \mathbb{R}$  der reellen Polynome vom Grad höchstens 2 seien die Vektoren  $g_\alpha(X)$ ,  $h_\alpha(X)$  und  $k(X)$  wie folgt gegeben:

$$g_\alpha(X) = 2X^2 + \alpha X + 1, \quad h_\alpha(X) = \alpha X^2 + X, \quad k(X) = 2X^2 + 2X + 1.$$

(a) Für welche Werte von  $\alpha$  sind die Vektoren  $g_\alpha(X)$ ,  $h_\alpha(X)$  und  $k(X)$  linear abhängig?

$$\alpha \in \boxed{\{0, 2\}}$$

(b) Stellen Sie den Vektor  $q(X) = 5X^2 + 5X + 3$  als Linearkombination von  $g_{-1}(X)$ ,  $h_{-1}(X)$  und  $k(X)$  dar.

$$q(X) = \boxed{\frac{2}{3}} \cdot g_{-1}(X) + \boxed{1} \cdot h_{-1}(X) + \boxed{\frac{7}{3}} \cdot k(X)$$

**Aufgabe 8** (5 Punkte)

 0  1  2  3  4  5

Gegeben seien

$$A := \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Bestimmen Sie die folgenden Determinanten:

$$\det(A) = \boxed{5}, \quad \det(2A) = \boxed{20}, \quad \det(A - E_2) = \boxed{-9}.$$

(b) Bestimmen Sie die Inverse von  $A$ :

$$A^{-1} = \boxed{\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}}$$

(c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge  $\mathcal{L}$  des Gleichungssystems  $Ax = b$ .

$$\mathcal{L} = \boxed{\left\{ \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}}$$

**Scheinklausur**

**Höhere Mathematik 1**

12.12.2015

Beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

 1  2  3  4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

*Viel Erfolg!*

**Aufgabe 1** (1 Punkt)

 0  1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

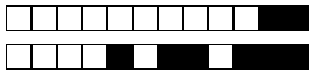
**Matrikelnummer:**

**Gruppe:**

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

**Name, Vorname:**

**Matrikelnummer:**



**Aufgabe 2** (4 Punkte)

0  1  2  3  4

Gegeben sind die Punkte  $P = (-1, 1, 1)$ ,  $Q = (0, 2, 1)$  und  $R = (0, 1, -1)$ .

Bestimmen Sie  $\vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene  $E$  welche die Punkte  $P$ ,  $Q$  und  $R$  enthält.

$-\frac{2}{3} x_1 + \frac{2}{3} x_2 - \frac{1}{3} x_3 = 1$

Jetzt sei zusätzlich der Punkt  $S = (-1, 2, -3)$  gegeben. Bestimmen Sie den Abstand  $a$  von  $S$  zu  $E$ :

$a = 2$

**Aufgabe 3** (5 Punkte)

0  1  2  3  4  5

(a) Sei  $z = a + ib$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ . Berechnen Sie

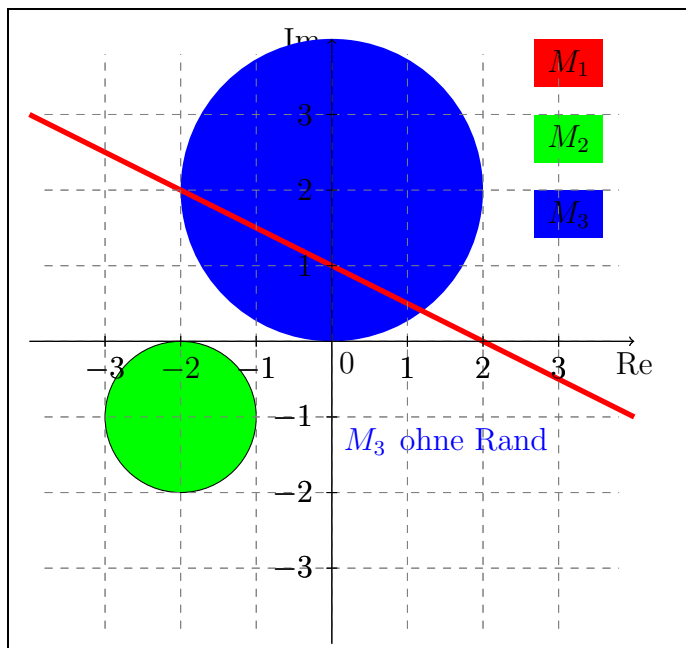
$i\bar{z}z + 2\bar{z} - 2z = i(a^2 + b^2 - 4b)$

(b) Skizzieren Sie die Mengen

$M_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) + \frac{1}{2} \text{Re}(z) - 1 = 0 \right\}$ ,  $M_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z + 2 + i| \leq 1 \right\}$ ,

$M_3 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(i\bar{z}z + 2\bar{z} - 2z) < 0 \right\}$

in der komplexen Zahlenebene.



**Aufgabe 4** (3 Punkte)

0  1  2  3

Im Vektorraum  $\mathbb{R}^4$  seien  $u = (0, -1, 4, -2)^T$  und  $v = (-1, 0, -2, 1)^T$  gegeben. Berechnen Sie

$|v| = \sqrt{6}$  und  $\langle u | v \rangle = -10$ .

Geben Sie einen Vektor  $w \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$  so an, dass  $w$  auf  $L(u, v)$  senkrecht steht:

$w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

**Aufgabe 5** (4 Punkte)

0  1  2  3  4

Die komplexen Zahlen  $w_0 = \sqrt{3} + i$ ,  $w_1 = -2i$  und  $w_2 = -\sqrt{3} + i$  sind Lösungen der Gleichung  $w^3 = z$ . Die Menge der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Basis  $B: 1, i$ .

(a) Sei die  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch  $f(w_0) = w_1$  und  $f(w_1) = w_2$ .

Bestimmen Sie die Matrix  ${}_B f_B$ .

${}_B f_B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$

(b) Geben Sie  $w_2$  in Polarkoordinaten an.  $w_2 = 2(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i \sin(\frac{5\pi}{6}))$

(c) Bestimmen Sie  $z$ .  $z = 8i$

**Aufgabe 6** (4 Punkte)

0  1  2  3  4

Es seien die Abbildungen

$f_1: \mathbb{C} \rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\} : z \mapsto z\bar{z} - 3$

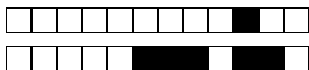
$f_2: \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \pi \leq \arg(z) \leq \frac{3\pi}{2}\} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto z \left( \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$

$f_3: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto -\text{Im}(z) - i \text{Re}(z)$

$f_4: \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto (x - 5)^2 - 1$

gegeben. Prüfen Sie diese auf Injektivität und Surjektivität. Tragen Sie „Ja“ oder „Nein“ ein.

	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
injektiv	Nein	Ja	Ja	Ja
surjektiv	Ja	Nein	Ja	Nein



**Aufgabe 7** (5 Punkte)

0 1 2 3 4 5

Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$  ein reeller Parameter. Im Vektorraum  $\text{Pol}_2 \mathbb{R}$  der reellen Polynome vom Grad höchstens 2 seien die Vektoren  $g_\alpha(X)$ ,  $h_\alpha(X)$  und  $k(X)$  wie folgt gegeben:

$$g_\alpha(X) = 2X^2 + X + \alpha, \quad h_\alpha(X) = \alpha X^2 + 1, \quad k(X) = 2X^2 + X + 1.$$

(a) Für welche Werte von  $\alpha$  sind die Vektoren  $g_\alpha(X)$ ,  $h_\alpha(X)$  und  $k(X)$  linear abhängig?

$$\alpha \in \boxed{\{0,1\}}$$

(b) Stellen Sie den Vektor  $q(X) = 4X^2 + \frac{5}{2}X$  als Linearkombination von  $g_{-1}(X)$ ,  $h_{-1}(X)$  und  $k(X)$  dar.

$$q(X) = \boxed{\frac{7}{4}} \cdot g_{-1}(X) + \boxed{1} \cdot h_{-1}(X) + \boxed{\frac{3}{4}} \cdot k(X)$$

**Aufgabe 8** (5 Punkte)

0 1 2 3 4 5

Gegeben seien

$$A := \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Bestimmen Sie die folgenden Determinanten:

$$\det(A) = \boxed{6}, \quad \det(2A) = \boxed{24}, \quad \det(A - E_2) = \boxed{-7}.$$

(b) Bestimmen Sie die Inverse von  $A$ :

$$A^{-1} = \boxed{\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}}$$

(c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge  $\mathcal{L}$  des Gleichungssystems  $Ax = b$ .

$$\mathcal{L} = \boxed{\left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}}$$

**Scheinklausur**

**Höhere Mathematik 1**

12.12.2015

Beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

1 2 3 4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

*Viel Erfolg!*

**Aufgabe 1** (1 Punkt)

0 1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

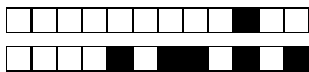
Matrikelnummer:

Gruppe:

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

Name, Vorname:

Matrikelnummer:



**Aufgabe 2** (4 Punkte)

0  1  2  3  4

Gegeben sind die Punkte  $P = (2, 1, 0)$ ,  $Q = (1, -1, 0)$  und  $R = (1, 1, -1)$ .

Bestimmen Sie  $\vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene  $E$  welche die Punkte  $P$ ,  $Q$  und  $R$  enthält.

$\frac{2}{3} x_1 + \left(-\frac{1}{3}\right) x_2 + \left(-\frac{2}{3}\right) x_3 = 1$

Jetzt sei zusätzlich der Punkt  $S = (2, 0, -1)$  gegeben. Bestimmen Sie den Abstand  $a$  von  $S$  zu  $E$ :

$a = 1$

**Aufgabe 3** (5 Punkte)

0  1  2  3  4  5

(a) Sei  $z = a + ib$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ . Berechnen Sie

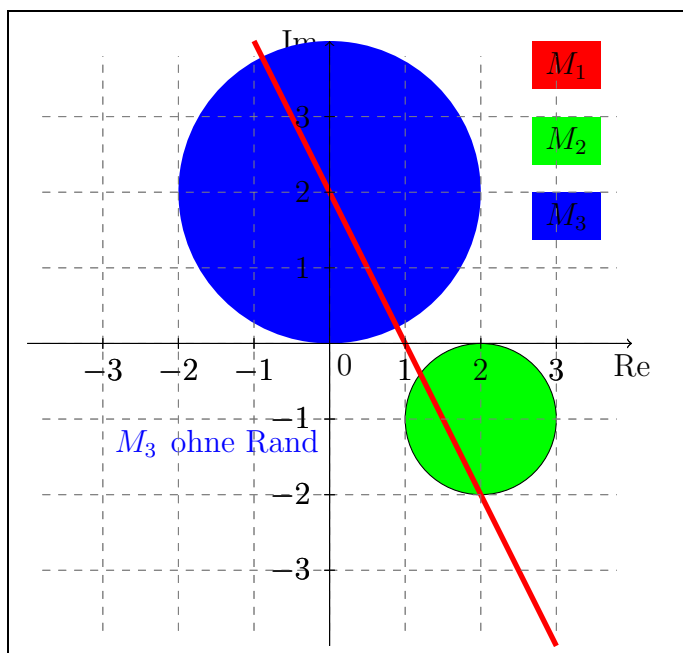
$\frac{1}{2} i \bar{z} z + \bar{z} - z = \frac{1}{2} i (a^2 + b^2 - 4b)$

(b) Skizzieren Sie die Mengen

$M_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) + 2\text{Re}(z) - 2 = 0\}$ ,  $M_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2 + i| \leq 1\}$ ,

$M_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}\left(\frac{1}{2} i \bar{z} z + \bar{z} - z\right) < 0\}$

in der komplexen Zahlenebene.



**Aufgabe 4** (3 Punkte)

0  1  2  3

Im Vektorraum  $\mathbb{R}^4$  seien  $u = (-4, 0, -2, 1)^T$  und  $v = (0, 3, 4, -2)^T$  gegeben. Berechnen Sie

$|v| = \sqrt{29}$  und  $\langle u | v \rangle = -10$ .

Geben Sie einen Vektor  $w \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$  so an, dass  $w$  auf  $L(u, v)$  senkrecht steht:

$w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

**Aufgabe 5** (4 Punkte)

0  1  2  3  4

Die komplexen Zahlen  $w_0 = -\sqrt{3} - i$ ,  $w_1 = 2i$  und  $w_2 = \sqrt{3} - i$  sind Lösungen der Gleichung  $w^3 = z$ . Die Menge der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Basis  $B: 1, i$ .

(a) Sei die  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch  $f(w_0) = w_1$  und  $f(w_1) = w_2$ .

Bestimmen Sie die Matrix  ${}_B f_B$ .

${}_B f_B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$

(b) Geben Sie  $w_2$  in Polarkoordinaten an.  $w_2 = 2 \left( \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) \right)$

(c) Bestimmen Sie  $z$ .  $z = -8i$

**Aufgabe 6** (4 Punkte)

0  1  2  3  4

Es seien die Abbildungen

$f_1: \mathbb{C} \rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -4\}: z \mapsto z\bar{z} - 4$

$f_2: \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \frac{3\pi}{2} \leq \arg(z) \leq 2\pi\} \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto z \left( \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$

$f_3: \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto (x - 3)^2 - 1$

$f_4: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto -\text{Im}(z) + i \text{Re}(z)$

gegeben. Prüfen Sie diese auf Injektivität und Surjektivität. Tragen Sie „Ja“ oder „Nein“ ein.

	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
injektiv	Nein	Ja	Ja	Ja
surjektiv	Ja	Nein	Nein	Ja