Aufgabe 7 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Gegeben ist die vom reellen Parameter α abhängige Matrix A_α durch

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 2\alpha - 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Spur und die Determinante von A_α.

$\operatorname{Sp} A_\alpha = \boxed{2\alpha + 1}$ $\quad \det A_\alpha = \boxed{8\alpha - 12}$

(b) Bestimmen Sie den Eigenwert von A_α zum Eigenvektor $(4, 2\alpha - 7)^\intercal$.

$\boxed{2\alpha - 3}$

(c) Entscheiden Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die Matrix A_α invertierbar ist.

$\boxed{A_\alpha \text{ ist invertierbar für alle } \alpha \neq \frac{3}{2}}$

(d) Entscheiden Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die Matrix A_α diagonalisierbar ist.

$\boxed{A_\alpha \text{ ist diagonalisierbar für alle } \alpha \neq \frac{7}{2}}$

Aufgabe 8 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Bestimmen Sie alle Eigenwerte, sowie die zugehörigen algebraischen Vielfachheiten und Eigenräume der untenstehenden komplexen Matrix.

$$\begin{pmatrix} 2-\mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i} \\ 8-2\mathrm{i} & -2 & -2\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 & 2+\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Eigenwert	algebraische Vielfachheit	Eigenraum
2	2	$\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$
-2	1	$\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

Scheinklausur **Höhere Mathematik 1** **30. 01. 2016**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ■1 ☐2 ☐3 ☐4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt. *Viel Erfolg!*

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:							Gruppe:	
☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Aufgabe 2 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Gegeben sei die affine Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\varphi\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}, \quad \varphi\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}, \quad \varphi\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Matrix A und den Vektor b, für die $\varphi\colon x \mapsto Ax + b$ gilt.

$A = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}$ $\quad b = \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}}$

Aufgabe 3 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Gegeben seien die folgenden Vektoren:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die nachfolgenden Skalarprodukte.

$\langle v_1 \mid v_2 \rangle =$ $\boxed{-18}$ $\qquad \langle v_1 \mid v_3 \rangle =$ $\boxed{27}$

(b) Finden Sie ein Orthonormalsystem u_1, u_2, u_3 mit $u_1 \in \mathrm{L}(v_1)$, $u_2 \in \mathrm{L}(v_1, v_2)$, $u_3 \in \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$.

$$u_1 = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}} \qquad u_2 = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad u_3 = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 4 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Gegeben sei das elliptische Paraboloid

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1^2 + 4x_2^2 - x_3 - 1 = 0\}$$

und die vom Parameter $d \in \mathbb{R}$ abhängige Ebene $E_d = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = d\}$. Geben Sie, falls möglich, ein $d \in \mathbb{R}$ an, so dass der Schnitt $Q \cap E_d$ die jeweils angegebene Gestalt hat. Falls dies nicht möglich ist, tragen Sie „existiert nicht" in das Kästchen ein.

(a) Genau ein Punkt. $\boxed{d = -1}$

(b) Eine Ellipse mit den Halbachsen $h_1 = 1$ und $h_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. $\boxed{d = 2}$

(c) Eine Parabel. $\boxed{\text{existiert nicht}}$

Aufgabe 5 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Gegeben ist die Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\mathsf{T} A x + c = 0\}$ mit

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = 0.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte λ_1, λ_2 von A und eine orthogonale Matrix F so, dass $F^\mathsf{T} A F$ eine Diagonalmatrix ist.

$\lambda_1 = \boxed{-2}$ $\qquad F = \boxed{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}$

$\lambda_2 = \boxed{1}$

(b) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform und die Gestalt der Quadrik Q.

Euklidische Normalform $\boxed{-2y_1^2 + y_2^2 = 0}$

Gestalt $\boxed{\text{schneidendes Geradenpaar}}$

Aufgabe 6 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

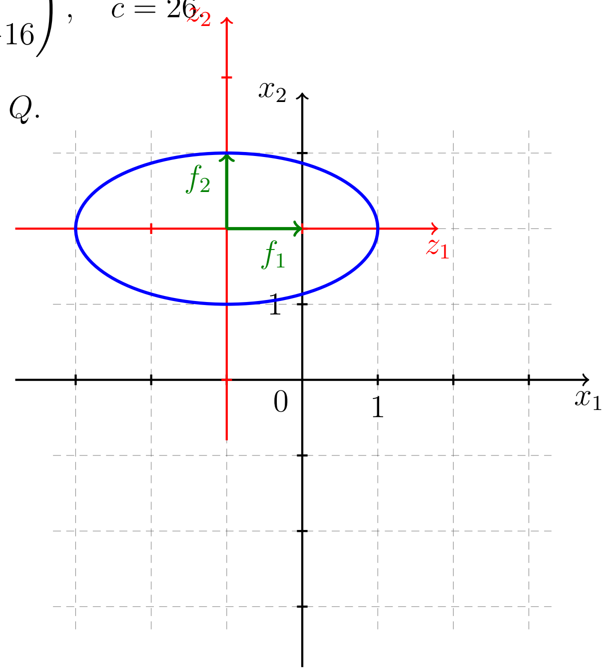
Gegeben ist die Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\mathsf{T} A x + 2a^\mathsf{T} x + c = 0\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 2 \\ -16 \end{pmatrix}, \quad c = 26.$$

(a) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q.

$$\boxed{-\frac{1}{4}z_1^2 - z_2^2 + 1 = 0}$$

(b) Skizzieren Sie die Quadrik Q in Standardkoordinaten. Zeichnen Sie zudem das Koordinatensystem ein, welches zur oben bestimmten euklidischen Normalform gehört.



Aufgabe 7 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Gegeben ist die vom reellen Parameter α abhängige Matrix A_α durch

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 4\alpha - 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Spur und die Determinante von A_α.

$\operatorname{Sp} A_\alpha = \boxed{4\alpha + 5}$ $\quad \det A_\alpha = \boxed{24\alpha - 6}$

(b) Bestimmen Sie den Eigenwert von A_α zum Eigenvektor $(3, 4\alpha - 7)^\intercal$.

$\boxed{4\alpha - 1}$

(c) Entscheiden Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die Matrix A_α invertierbar ist.

$\boxed{A_\alpha \text{ ist invertierbar für alle } \alpha \neq \frac{1}{4}}$

(d) Entscheiden Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die Matrix A_α diagonalisierbar ist.

$\boxed{A_\alpha \text{ ist diagonalisierbar für alle } \alpha \neq \frac{7}{4}}$

Aufgabe 8 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Bestimmen Sie alle Eigenwerte, sowie die zugehörigen algebraischen Vielfachheiten und Eigenräume der untenstehenden komplexen Matrix.

$$\begin{pmatrix} -2-\mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i} \\ -5-\mathrm{i} & 3 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 & -2+\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Eigenwert	algebraische Vielfachheit	Eigenraum
-2	2	$L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$
3	1	$L\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ☐1 ■2 ☐3 ☐4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt. *Viel Erfolg!*

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Aufgabe 2 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Gegeben sei die affine Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Matrix A und den Vektor b, für die $\varphi\colon x \mapsto Ax + b$ gilt.

$A = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}$ $\qquad b = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}}$

Aufgabe 3 (6 Punkte) 0 1 2 3 4 5 6

Gegeben seien die folgenden Vektoren:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die nachfolgenden Skalarprodukte.

$\langle v_1 \mid v_2 \rangle =$ -27 $\quad\langle v_1 \mid v_3 \rangle =$ 18

(b) Finden Sie ein Orthonormalsystem u_1, u_2, u_3 mit $u_1 \in \mathrm{L}(v_1)$, $u_2 \in \mathrm{L}(v_1, v_2)$, $u_3 \in \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$.

$$u_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad u_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 (3 Punkte) 0 1 2 3

Gegeben sei das elliptische Paraboloid

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 4x_1^2 + 3x_2^2 - x_3 + 2 = 0\}$$

und die vom Parameter $d \in \mathbb{R}$ abhängige Ebene $E_d = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = d\}$. Geben Sie, falls möglich, ein $d \in \mathbb{R}$ an, so dass der Schnitt $Q \cap E_d$ die jeweils angegebene Gestalt hat. Falls dies nicht möglich ist, tragen Sie „existiert nicht" in das Kästchen ein.

(a) Eine Ellipse mit den Halbachsen $h_1 = 1$ und $h_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}$. $\quad d = 6$

(b) Genau ein Punkt. $\quad d = 2$

(c) Eine Parabel. $\quad$ existiert nicht

Aufgabe 5 (5 Punkte) 0 1 2 3 4 5

Gegeben ist die Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\intercal A x + c = 0\}$ mit

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = -1.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte λ_1, λ_2 von A und eine orthogonale Matrix F so, dass $F^\intercal A F$ eine Diagonalmatrix ist.

$\lambda_1 = -2$

$\lambda_2 = 1$

$$F = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform und die Gestalt der Quadrik Q.

Euklidische Normalform $\quad 2y_1^2 - y_2^2 + 1 = 0$

Gestalt $\quad$ Hyperbel

Aufgabe 6 (3 Punkte) 0 1 2 3

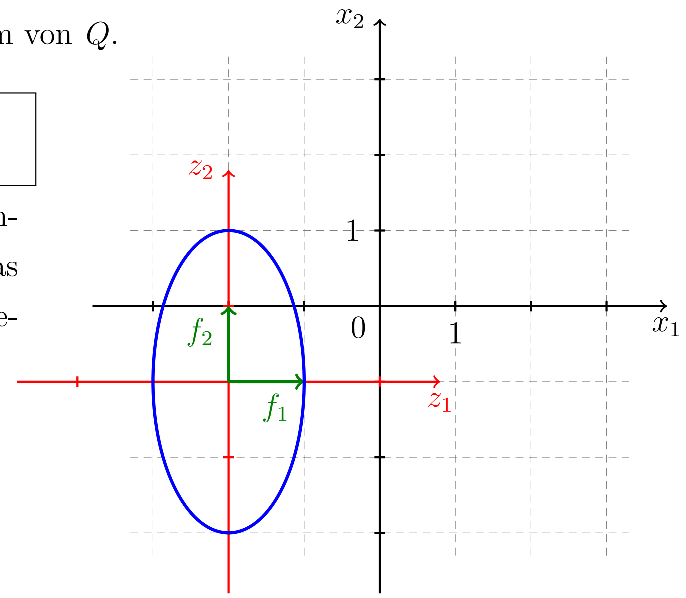
Gegeben ist die Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\intercal A x + 2a^\intercal x + c = 0\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c = 26.$$

(a) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q.

$$-z_1^2 - \frac{1}{4}z_2^2 + 1 = 0$$

(b) Skizzieren Sie die Quadrik Q in Standardkoordinaten. Zeichnen Sie zudem das Koordinatensystem ein, welches zur oben bestimmten euklidischen Normalform gehört.



Aufgabe 7 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Gegeben ist die vom reellen Parameter α abhängige Matrix A_α durch

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 0 & 3\alpha+2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Spur und die Determinante von A_α.

$\operatorname{Sp} A_\alpha = \boxed{3\alpha - 2}$ $\quad \det A_\alpha = \boxed{-12\alpha - 8}$

(b) Bestimmen Sie den Eigenwert von A_α zum Eigenvektor $(-2, 3\alpha+6)^\intercal$.

$\boxed{3\alpha + 2}$

(c) Entscheiden Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die Matrix A_α invertierbar ist.

$\boxed{A_\alpha \text{ ist invertierbar für alle } \alpha \neq -\frac{2}{3}}$

(d) Entscheiden Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die Matrix A_α diagonalisierbar ist.

$\boxed{A_\alpha \text{ ist diagonalisierbar für alle } \alpha \neq -2}$

Aufgabe 8 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Bestimmen Sie alle Eigenwerte, sowie die zugehörigen algebraischen Vielfachheiten und Eigenräume der untenstehenden komplexen Matrix.

$$\begin{pmatrix} 3-\mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i} \\ -6+\mathrm{i} & -3 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 & 3+\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Eigenwert	algebraische Vielfachheit	Eigenraum
3	2	$\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$
-3	1	$\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

Scheinklausur **Höhere Mathematik 1** **30. 01. 2016**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ☐1 ☐2 ■3 ☐4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt. *Viel Erfolg!*

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Gegeben sei die affine Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Matrix A und den Vektor b, für die $\varphi\colon x \mapsto Ax + b$ gilt.

$A = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}}$ $\qquad b = \boxed{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}}$

Aufgabe 3 (6 Punkte) 0 1 2 3 4 5 6

Gegeben seien die folgenden Vektoren:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -8 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die nachfolgenden Skalarprodukte.

$\langle v_1 \mid v_2 \rangle =$ 27 $\qquad \langle v_1 \mid v_3 \rangle =$ -18

(b) Finden Sie ein Orthonormalsystem u_1, u_2, u_3 mit $u_1 \in \mathrm{L}(v_1)$, $u_2 \in \mathrm{L}(v_1, v_2)$, $u_3 \in \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$.

$$u_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 (3 Punkte) 0 1 2 3

Gegeben sei das elliptische Paraboloid

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3 + 1 = 0\}$$

und die vom Parameter $d \in \mathbb{R}$ abhängige Ebene $E_d = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = d\}$. Geben Sie, falls möglich, ein $d \in \mathbb{R}$ an, so dass der Schnitt $Q \cap E_d$ die jeweils angegebene Gestalt hat. Falls dies nicht möglich ist, tragen Sie „existiert nicht“ in das Kästchen ein.

(a) Eine Parabel. — existiert nicht

(b) Eine Ellipse mit den Halbachsen $h_1 = 1$ und $h_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}$. — $d = 4$

(c) Genau ein Punkt. — $d = 1$

Aufgabe 5 (5 Punkte) 0 1 2 3 4 5

Gegeben ist die Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\intercal A x + c = 0\}$ mit

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = 0.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte λ_1, λ_2 von A und eine orthogonale Matrix F so, dass $F^\intercal A F$ eine Diagonalmatrix ist.

$\lambda_1 = -2$

$\lambda_2 = 1$

$$F = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform und die Gestalt der Quadrik Q.

Euklidische Normalform: $-2y_1^2 + y_2^2 = 0$

Gestalt: schneidendes Geradenpaar

Aufgabe 6 (3 Punkte) 0 1 2 3

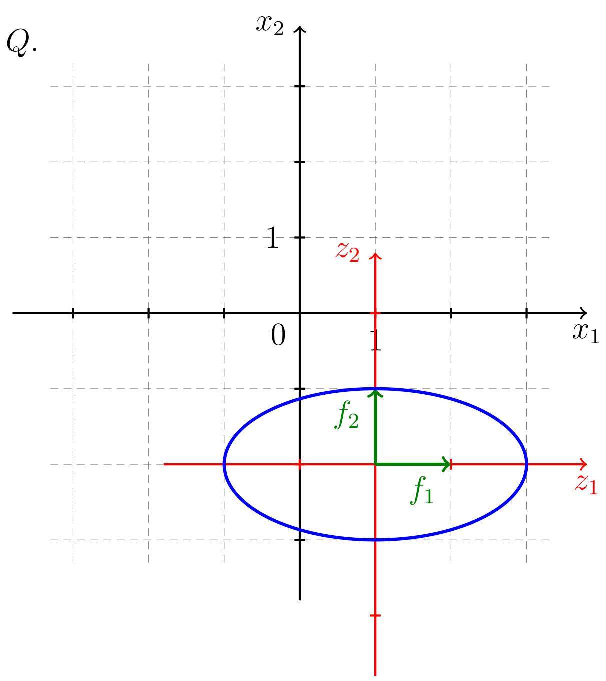
Gegeben ist die Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\intercal A x + 2a^\intercal x + c = 0\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} -2 \\ 16 \end{pmatrix}, \quad c = 26.$$

(a) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q.

$$-\frac{1}{4}z_1^2 - z_2^2 + 1 = 0$$

(b) Skizzieren Sie die Quadrik Q in Standardkoordinaten. Zeichnen Sie zudem das Koordinatensystem ein, welches zur oben bestimmten euklidischen Normalform gehört.



Aufgabe 7 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Gegeben ist die vom reellen Parameter α abhängige Matrix A_α durch

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4\alpha+1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Spur und die Determinante von A_α.

$\operatorname{Sp} A_\alpha = \boxed{4\alpha+3}$ $\quad \det A_\alpha = \boxed{8\alpha+2}$

(b) Bestimmen Sie den Eigenwert von A_α zum Eigenvektor $(2, 4\alpha-1)^\intercal$.

$\boxed{4\alpha+1}$

(c) Entscheiden Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die Matrix A_α invertierbar ist.

$\boxed{A_\alpha \text{ ist invertierbar für alle } \alpha \neq -\frac{1}{4}}$

(d) Entscheiden Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die Matrix A_α diagonalisierbar ist.

$\boxed{A_\alpha \text{ ist diagonalisierbar für alle } \alpha \neq \frac{1}{4}}$

Aufgabe 8 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Bestimmen Sie alle Eigenwerte, sowie die zugehörigen algebraischen Vielfachheiten und Eigenräume der untenstehenden komplexen Matrix.

$$\begin{pmatrix} -3-\mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i} \\ 10+2\mathrm{i} & 2 & 2\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 & -3+\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Eigenwert	algebraische Vielfachheit	Eigenraum
-3	2	$\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$
2	1	$\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

Scheinklausur **Höhere Mathematik 1** **30. 01. 2016**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ☐1 ☐2 ☐3 ■4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt. *Viel Erfolg!*

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Aufgabe 2 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Gegeben sei die affine Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Matrix A und den Vektor b, für die $\varphi\colon x \mapsto Ax + b$ gilt.

$A = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}$ $\quad b = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}}$

Aufgabe 3 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Gegeben seien die folgenden Vektoren:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die nachfolgenden Skalarprodukte.

$\langle v_1 \mid v_2 \rangle =$ 18 $\qquad \langle v_1 \mid v_3 \rangle =$ −27

(b) Finden Sie ein Orthonormalsystem u_1, u_2, u_3 mit $u_1 \in \mathrm{L}(v_1)$, $u_2 \in \mathrm{L}(v_1, v_2)$, $u_3 \in \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$.

$$u_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad u_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Gegeben sei das elliptische Paraboloid

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1^2 + 3x_2^2 - x_3 - 2 = 0\}$$

und die vom Parameter $d \in \mathbb{R}$ abhängige Ebene $E_d = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = d\}$. Geben Sie, falls möglich, ein $d \in \mathbb{R}$ an, so dass der Schnitt $Q \cap E_d$ die jeweils angegebene Gestalt hat. Falls dies nicht möglich ist, tragen Sie „existiert nicht" in das Kästchen ein.

(a) Genau ein Punkt. $\qquad d = -2$

(b) Eine Parabel. $\qquad$ existiert nicht

(c) Eine Ellipse mit den Halbachsen $h_1 = 1$ und $h_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}$. $\qquad d = 0$

Aufgabe 5 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Gegeben ist die Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\intercal A x + c = 0\}$ mit

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = -2.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte λ_1, λ_2 von A und eine orthogonale Matrix F so, dass $F^\intercal A F$ eine Diagonalmatrix ist.

$\lambda_1 = -2$

$\lambda_2 = 1$

$$F = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform und die Gestalt der Quadrik Q.

Euklidische Normalform: $y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + 1 = 0$

Gestalt: Hyperbel

Aufgabe 6 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Gegeben ist die Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\intercal A x + 2a^\intercal x + c = 0\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} -16 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad c = 26.$$

(a) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q.

$$-z_1^2 - \frac{1}{4}z_2^2 + 1 = 0$$

(b) Skizzieren Sie die Quadrik Q in Standardkoordinaten. Zeichnen Sie zudem das Koordinatensystem ein, welches zur oben bestimmten euklidischen Normalform gehört.