Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studiengang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/3	/5	/4	/3	/5	/3	/4	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Berechnen Sie:

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(6x)-1}{x^2}$	$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x^3-3x^2+3}{3x^3+4x}$	$\lim\limits_{N\to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{N} \frac{(5k+5)5^k}{(k+1)!}$
-18	$\frac{2}{3}$	$5\mathrm{e}^5$

Aufgabe 3 (*5 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto (x-1)^3\cos(2y) + 2x^2 - \pi\,.$$

Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{3(x-1)^2\cos(2y) + 4x} \\ \boxed{-2(x-1)^3\sin(2y)} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{H}f\,(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{6(x-1)\cos(2y) + 4} & \boxed{-6(x-1)^2\sin(2y)} \\ \boxed{-6(x-1)^2\sin(2y)} & \boxed{-4(x-1)^3\cos(2y)} \end{pmatrix}$$

Geben Sie das Taylor-Polynom der Stufe zwei zum Entwicklungspunkt $(2,\pi)$ an.

$$T_2\big(f,(x,y),(2,\pi)\big) = \boxed{9 - \pi + 11(x-2) + 5(x-2)^2 - 2\,(y-\pi)^2}$$

Aufgabe 4 (*4 Punkte*) Sei $f\colon \big(-\rho\,,\rho\big) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{\infty} (k+1)\,2^{k+1}\,x^k$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ dieser Potenzreihe: $\rho = \boxed{\frac{1}{2}}$

(b) Geben Sie eine Reihendarstellung der Stammfunktion F von f mit $F(0) = 0$ an.

$$F(x) = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} 2^n\,x^n}$$

(c) Stellen Sie $F(x)$ und $f(x)$ jeweils in geschlossener Form dar.

$$F(x) = \boxed{\frac{2x}{1-2x}}\,, \qquad f(x) = \boxed{\frac{2}{(1-2x)^2}}$$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum_{\ell=2}^{\infty} \left(\frac{z+3}{\ell-1}\right)^{\ell}$	$\sum_{m=3}^{\infty} \frac{(-1)^m}{5m+1}(z+3-\mathrm{i})^m$	$\sum_{n=4}^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{3}z+\mathrm{i}\right)^n$
z_0	-3	$-3+\mathrm{i}$	$-3\mathrm{i}$
ρ	$+\infty$	1	$\frac{3}{2}$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Es ist die Stelle zu bestimmen, an der die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}\colon (x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

unter den Nebenbedingungen $g_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$ und $g_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$ mit

$$g_1\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}\colon (x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto x_1^2 + y_1^2 - 1,$$
$$g_2\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}\colon (x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto (x_2 - 2)^2 + (y_2 - 2)^2 - 1$$

ihr globales Minimum annimmt.

(a) Bestimmen Sie dazu:

$$\nabla f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \left(\boxed{2(x_1 - x_2)}, \boxed{-2(x_1 - x_2)}, \boxed{2(y_1 - y_2)}, \boxed{-2(y_1 - y_2)} \right)^{\mathsf{T}}$$

$$\nabla g_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{2x_1} \\ \boxed{0} \\ \boxed{2y_1} \\ \boxed{0} \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{0} \\ \boxed{2(x_2 - 2)} \\ \boxed{0} \\ \boxed{2(y_2 - 2)} \end{pmatrix}$$

(b) Die Anwendung der Multiplikatormethode nach Lagrange ergibt die folgenden Kandidaten.

$$A_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathsf{T}}, \quad A_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathsf{T}}$$

Geben Sie den minimalen Funktionswert inklusive der Stelle, an der er angenommen wird, an.

$$f\left(\boxed{A_1}\right) = \boxed{12 - 8\sqrt{2}}$$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) Führen Sie eine Polynomdivision und eine Partialbruchzerlegung durch:

$$\frac{2x^5-5x^3-12x+2}{x^2-4} = \boxed{2x^3+3x+\frac{1}{2(x-2)}-\frac{1}{2(x+2)}}$$

Berechnen Sie das unbestimmte Integral:

$$\int \frac{2x^5-5x^3-12x+2}{x^2-4}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[\frac{1}{2}x^4+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}\ln|x-2|-\frac{1}{2}\ln|x+2|\right]}$$

Aufgabe 8 (*4 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integralе.

$\int 2x\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}\,x$	$\left[-x\mathrm{e}^{-2x}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right]$
$\int_0^{+\infty} 2x\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}\,x$	$\frac{1}{2}$
$\int \Big(-\mathrm{e}^{\cos(x)}\sin(x)\Big)\,\mathrm{d}\,x$	$\left[\mathrm{e}^{\cos(x)}\right]$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*)

(a) Gegeben seien die Punkte $P=(-3,0)$ und $Q=(-1,4)$. Sei K die gerade Strecke in $\mathbb{R}^2$ von P nach Q.

Geben Sie eine Parametrisierung C der Kurve K an und berechnen Sie die Ableitung $C'(t)$.

$$C\colon \boxed{[0,1]} \longrightarrow \mathbb{R}^2\colon t \longmapsto \boxed{\begin{pmatrix} 2t-3 \\ 4t \end{pmatrix}} \qquad C'(t) = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}}$$

(b) Sei V_α das vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Vektorfeld

$$V_\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha\mathrm{e}^{\alpha x_1+x_2}-2x_2 \\ \mathrm{e}^{\alpha x_1+x_2}+\alpha x_1 \end{pmatrix}.$$

Weiterhin sei

$$\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x_1,x_2) \mapsto \mathrm{e}^{-2x_1+x_2}-2x_1x_2.$$

Bestimmen Sie α so, dass Φ eine Potentialfunktion zum Vektorfeld V_α ist.

$$\alpha = \boxed{-2}$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/3	/5	/4	/3	/5	/3	/4	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\left(\cos(x)\right)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\, b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Berechnen Sie:

$\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{2^k}{(k-1)!}$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{x^2}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^3-5x+3}{2x^3+x^2}$
$2\mathrm{e}^2$	2	$\frac{3}{2}$

Aufgabe 3 (*5 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto (x-2)^3 \sin(3y) + 2x^2 \,.$$

Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{3(x-2)^2 \sin(3y) + 4x} \\ \boxed{3(x-2)^3 \cos(3y)} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{H}f\,(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{6(x-2)\sin(3y) + 4} & \boxed{9(x-2)^2 \cos(3y)} \\ \boxed{9(x-2)^2 \cos(3y)} & \boxed{-9(x-2)^3 \sin(3y)} \end{pmatrix}$$

Geben Sie das Taylor-Polynom der Stufe zwei zum Entwicklungspunkt $(1,\pi)$ an.

$$T_2\big(f,(x,y),(1,\pi)\big) = \boxed{2 + 4(x-1) + 3(y-\pi) + 2(x-1)^2 - 9(x-1)(y-\pi)}$$

Aufgabe 4 (*4 Punkte*) Sei $f\colon \big(-\rho\,,\rho\big) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\,3^{k+1}\,x^k$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ dieser Potenzreihe: $\rho = \boxed{\frac{1}{3}}$

(b) Geben Sie eine Reihendarstellung der Stammfunktion F von f mit $F(0) = 0$ an.

$$F(x) = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} 3^n\,x^n}$$

(c) Stellen Sie $F(x)$ und $f(x)$ jeweils in geschlossener Form dar.

$$F(x) = \boxed{\frac{3x}{1-3x}}\,, \qquad f(x) = \boxed{\frac{3}{(1-3x)^2}}$$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum_{\ell=2}^{\infty} 3^\ell \left(-\frac{1}{2}z - 2\mathrm{i}\right)^\ell$	$\sum_{m=3}^{\infty} \left(\frac{z-2}{m+1}\right)^m$	$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{2^n}{6n-3}(z+2+\mathrm{i})^n$
z_0	$-4\mathrm{i}$	2	$-2-\mathrm{i}$
ρ	$\frac{2}{3}$	$+\infty$	$\frac{1}{2}$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Es ist die Stelle zu bestimmen, an der die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}\colon (x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

unter den Nebenbedingungen $g_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$ und $g_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$ mit

$$g_1\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}\colon (x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto x_1^2 + y_1^2 - 1,$$
$$g_2\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}\colon (x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto (x_2+2)^2 + (y_2+2)^2 - 1$$

ihr globales Maximum annimmt.

(a) Bestimmen Sie dazu:

$$\nabla f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \left(\boxed{2(x_1 - x_2)}, \boxed{-2(x_1 - x_2)}, \boxed{2(y_1 - y_2)}, \boxed{-2(y_1 - y_2)} \right)^\intercal$$

$$\nabla g_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{2x_1} \\ \boxed{0} \\ \boxed{2y_1} \\ \boxed{0} \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{0} \\ \boxed{2(x_2+2)} \\ \boxed{0} \\ \boxed{2(y_2+2)} \end{pmatrix}$$

(b) Die Anwendung der Multiplikatormethode nach Lagrange ergibt die folgenden Kandidaten.

$$B_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -2+\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^\intercal, \quad B_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -2-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -2-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^\intercal$$

Geben Sie den maximalen Funktionswert inklusive der Stelle, an der er angenommen wird, an.

$$f\left(\boxed{B_2}\right) = \boxed{12 + 8\sqrt{2}}$$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) Führen Sie eine Polynomdivision und eine Partialbruchzerlegung durch:

$$\frac{2x^5 - 13x^3 - 45x + 3}{x^2 - 9} = \boxed{2x^3 + 5x + \frac{1}{2(x-3)} - \frac{1}{2(x+3)}}$$

Berechnen Sie das unbestimmte Integral:

$$\int \frac{2x^5 - 13x^3 - 45x + 3}{x^2 - 9} \,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[\frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}\ln|x-3| - \frac{1}{2}\ln|x+3|\right]}$$

Aufgabe 8 (*4 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$\int 3x\mathrm{e}^{-3x} \,\mathrm{d}\,x$	$\left[-x\mathrm{e}^{-3x} - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x}\right]$
$\int_0^{+\infty} 3x\mathrm{e}^{-3x} \,\mathrm{d}\,x$	$\frac{1}{3}$
$\int \left(\mathrm{e}^{\sin(x)} \cos(x)\right) \mathrm{d}\,x$	$\left[\mathrm{e}^{\sin(x)}\right]$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*)

(a) Gegeben seien die Punkte $P = (-2, 0)$ und $Q = (-1, 3)$. Sei K die gerade Strecke in $\mathbb{R}^2$ von P nach Q.

Geben Sie eine Parametrisierung C der Kurve K an und berechnen Sie die Ableitung $C'(t)$.

$$C\colon \boxed{[0,1]} \longrightarrow \mathbb{R}^2\colon t \longmapsto \boxed{\begin{pmatrix} t-2 \\ 3t \end{pmatrix}} \qquad C'(t) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

(b) Sei V_α das vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Vektorfeld

$$V_\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha\mathrm{e}^{\alpha x_1 - x_2} - 3x_2 \\ -\mathrm{e}^{\alpha x_1 - x_2} + \alpha x_1 \end{pmatrix}.$$

Weiterhin sei

$$\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x_1, x_2) \mapsto \mathrm{e}^{-3x_1 - x_2} - 3x_1x_2.$$

Bestimmen Sie α so, dass Φ eine Potentialfunktion zum Vektorfeld V_α ist.

$$\alpha = \boxed{-3}$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/3	/5	/4	/3	/5	/3	/4	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,,\ b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:		**Gruppennr.:**	

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Berechnen Sie:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3+2x^2-1}{3x^3+x}$	$\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{N} \frac{3^{k-1}(k+1)}{(k+1)!}$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(6x)}{x^2}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{\mathrm{e}^3}{3}$	18

Aufgabe 3 (*5 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto (x+1)^3\cos(2y) - 2x^2 + \pi\,.$$

Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{3(x+1)^2\cos(2y) - 4x} \\ \boxed{-2(x+1)^3\sin(2y)} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{H}f\,(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{6(x+1)\cos(2y) - 4} & \boxed{-6(x+1)^2\sin(2y)} \\ \boxed{-6(x+1)^2\sin(2y)} & \boxed{-4(x+1)^3\cos(2y)} \end{pmatrix}$$

Geben Sie das Taylor-Polynom der Stufe zwei zum Entwicklungspunkt $(-2,\pi)$ an.

$$T_2\big(f,(x,y),(-2,\pi)\big) = \boxed{-9 + \pi + 11(x+2) - 5(x+2)^2 + 2\,(y-\pi)^2}$$

Aufgabe 4 (*4 Punkte*) Sei $f\colon \big(-\rho\,,\rho\big) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{\infty} (k+1)\,4^{k+1}\,x^k$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ dieser Potenzreihe: $\rho = \boxed{\frac{1}{4}}$

(b) Geben Sie eine Reihendarstellung der Stammfunktion F von f mit $F(0) = 0$ an.

$$F(x) = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} 4^n\,x^n}$$

(c) Stellen Sie $F(x)$ und $f(x)$ jeweils in geschlossener Form dar.

$$F(x) = \boxed{\frac{4x}{1-4x}}\,, \qquad f(x) = \boxed{\frac{4}{(1-4x)^2}}$$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum_{\ell=2}^{\infty} \frac{3^\ell}{4\ell-4}(z-3+2\mathrm{i})^\ell$	$\sum_{m=3}^{\infty} 4^m \left(-\frac{1}{5}z+\mathrm{i}\right)^m$	$\sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{z-3}{n-2}\right)^n$
z_0	$3-2\mathrm{i}$	$5\mathrm{i}$	3
ρ	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{4}$	$+\infty$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Es ist die Stelle zu bestimmen, an der die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}\colon (x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

unter den Nebenbedingungen $g_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$ und $g_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$ mit

$$g_1\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}\colon (x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto x_1^2 + y_1^2 - 1,$$
$$g_2\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}\colon (x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto (x_2 - 2\sqrt{3})^2 + (y_2 - 2)^2 - 1$$

ihr globales Minimum annimmt.

(a) Bestimmen Sie dazu:

$$\nabla f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \left(\boxed{2(x_1 - x_2)}, \boxed{-2(x_1 - x_2)}, \boxed{2(y_1 - y_2)}, \boxed{-2(y_1 - y_2)} \right)^\intercal$$

$$\nabla g_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{2x_1} \\ \boxed{0} \\ \boxed{2y_1} \\ \boxed{0} \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{0} \\ \boxed{2(x_2 - 2\sqrt{3})} \\ \boxed{0} \\ \boxed{2(y_2 - 2)} \end{pmatrix}$$

(b) Die Anwendung der Multiplikatormethode nach Lagrange ergibt die folgenden Kandidaten.

$$C_1 = \left(\frac{1}{2}, 2\sqrt{3} - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^\intercal, \quad C_2 = \left(-\frac{1}{2}, 2\sqrt{3} + \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^\intercal$$

Geben Sie den minimalen Funktionswert inklusive der Stelle, an der er angenommen wird, an.

$$f\left(\boxed{C_1}\right) = \boxed{20 - 8\sqrt{3}}$$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) Führen Sie eine Polynomdivision und eine Partialbruchzerlegung durch:

$$\frac{2x^5 - 11x^3 + 12x + 1}{x^2 - 4} = \boxed{2x^3 - 3x + \frac{1}{4(x-2)} - \frac{1}{4(x+2)}}$$

Berechnen Sie das unbestimmte Integral:

$$\int \frac{2x^5 - 11x^3 + 12x + 1}{x^2 - 4} \,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}\ln|x-2| - \frac{1}{4}\ln|x+2|\right]}$$

Aufgabe 8 (*4 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$\int 4x\mathrm{e}^{-4x} \,\mathrm{d}\,x$	$\left[-x\mathrm{e}^{-4x} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-4x}\right]$
$\int_0^{+\infty} 4x\mathrm{e}^{-4x} \,\mathrm{d}\,x$	$\frac{1}{4}$
$\int \Big(-\mathrm{e}^{\cos(x)}\sin(x)\Big) \,\mathrm{d}\,x$	$\left[\mathrm{e}^{\cos(x)}\right]$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*)

(a) Gegeben seien die Punkte $P = (3, 0)$ und $Q = (1, 4)$. Sei K die gerade Strecke in $\mathbb{R}^2$ von P nach Q.

Geben Sie eine Parametrisierung C der Kurve K an und berechnen Sie die Ableitung $C'(t)$.

$$C\colon \boxed{[0,1]} \longrightarrow \mathbb{R}^2\colon t \longmapsto \boxed{\begin{pmatrix} -2t+3 \\ 4t \end{pmatrix}} \qquad C'(t) = \boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}}$$

(b) Sei V_α das vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Vektorfeld

$$V_\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha\mathrm{e}^{\alpha x_1 + x_2} + 2x_2 \\ \mathrm{e}^{\alpha x_1 + x_2} + \alpha x_1 \end{pmatrix}.$$

Weiterhin sei

$$\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x_1, x_2) \mapsto \mathrm{e}^{2x_1 + x_2} + 2x_1x_2.$$

Bestimmen Sie α so, dass Φ eine Potentialfunktion zum Vektorfeld V_α ist.

$$\alpha = \boxed{2}$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/3	/5	/4	/3	/5	/3	/4	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:		**Gruppennr.:**	

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Berechnen Sie:

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{\cos(2x)-1}{x^2}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3+4x-5}{2x^3-3x^2}$	$\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{4^k}{(k-1)!}$
$\cos(2)-1$	$\frac{1}{2}$	$4\mathrm{e}^4$

Aufgabe 3 (*5 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto (x+2)^3 \sin(3y) - 2x^2 \,.$$

Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{3(x+2)^2 \sin(3y) - 4x} \\ \boxed{3(x+2)^3 \cos(3y)} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{H}f\,(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{6(x+2)\sin(3y) - 4} & \boxed{9(x+2)^2 \cos(3y)} \\ \boxed{9(x+2)^2 \cos(3y)} & \boxed{-9(x+2)^3 \sin(3y)} \end{pmatrix}$$

Geben Sie das Taylor-Polynom der Stufe zwei zum Entwicklungspunkt $(-1, \pi)$ an.

$$T_2\big(f, (x,y), (-1,\pi)\big) = \boxed{-2 + 4(x+1) - 3(y-\pi) - 2(x+1)^2 - 9(x+1)(y-\pi)}$$

Aufgabe 4 (*4 Punkte*) Sei $f\colon \big(-\rho\,,\rho\big) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{\infty} (k+1)\, 5^{\,k+1}\, x^k$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ dieser Potenzreihe: $\rho = \boxed{\frac{1}{5}}$

(b) Geben Sie eine Reihendarstellung der Stammfunktion F von f mit $F(0) = 0$ an.

$$F(x) = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} 5^n\, x^n}$$

(c) Stellen Sie $F(x)$ und $f(x)$ jeweils in geschlossener Form dar.

$$F(x) = \boxed{\frac{5x}{1-5x}} \,, \qquad f(x) = \boxed{\frac{5}{(1-5x)^2}}$$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum_{\ell=2}^{\infty} \left(\frac{z+2}{\ell+4}\right)^{\ell}$	$\sum_{m=3}^{\infty} \frac{(-1)^m}{3m-7}(z+2-3\mathrm{i})^m$	$\sum_{n=4}^{\infty} 5^n \left(\frac{1}{4}z+\mathrm{i}\right)^n$
z_0	-2	$-2+3\mathrm{i}$	$-4\mathrm{i}$
ρ	$+\infty$	1	$\frac{4}{5}$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Es ist die Stelle zu bestimmen, an der die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}\colon (x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

unter den Nebenbedingungen $g_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$ und $g_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$ mit

$$g_1\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}\colon (x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto x_1^2 + y_1^2 - 1,$$
$$g_2\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}\colon (x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto (x_2 + 2\sqrt{3})^2 + (y_2 + 2)^2 - 1$$

ihr globales Maximum annimmt.

(a) Bestimmen Sie dazu:

$$\nabla f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \left(\boxed{2(x_1 - x_2)}, \boxed{-2(x_1 - x_2)}, \boxed{2(y_1 - y_2)}, \boxed{-2(y_1 - y_2)} \right)^{\intercal}$$

$$\nabla g_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{2x_1} \\ \boxed{0} \\ \boxed{2y_1} \\ \boxed{0} \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{0} \\ \boxed{2(x_2 + 2\sqrt{3})} \\ \boxed{0} \\ \boxed{2(y_2 + 2)} \end{pmatrix}$$

(b) Die Anwendung der Multiplikatormethode nach Lagrange ergibt die folgenden Kandidaten.

$$D_1 = \left(-\frac{1}{2}, -2\sqrt{3} + \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{\intercal}, \quad D_2 = \left(\frac{1}{2}, -2\sqrt{3} - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{\intercal}$$

Geben Sie den maximalen Funktionswert inklusive der Stelle, an der er angenommen wird, an.

$$f\left(\boxed{D_2} \right) = \boxed{20 + 8\sqrt{3}}$$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) Führen Sie eine Polynomdivision und eine Partialbruchzerlegung durch:

$$\frac{2x^5-21x^3+27x+2}{x^2-9} = \boxed{2x^3-3x+\frac{1}{3(x-3)}-\frac{1}{3(x+3)}}$$

Berechnen Sie das unbestimmte Integral:

$$\int \frac{2x^5-21x^3+27x+2}{x^2-9}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{3}\ln|x-3|-\frac{1}{3}\ln|x+3|\right]}$$

Aufgabe 8 (*4 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$\int 5x\mathrm{e}^{-5x}\,\mathrm{d}\,x$	$\left[-x\mathrm{e}^{-5x}-\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-5x}\right]$
$\int_0^{+\infty} 5x\mathrm{e}^{-5x}\,\mathrm{d}\,x$	$\frac{1}{5}$
$\int \left(\mathrm{e}^{\sin(x)}\cos(x)\right)\mathrm{d}\,x$	$\left[\mathrm{e}^{\sin(x)}\right]$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*)

(a) Gegeben seien die Punkte $P=(2,0)$ und $Q=(1,3)$. Sei K die gerade Strecke in $\mathbb{R}^2$ von P nach Q.

Geben Sie eine Parametrisierung C der Kurve K an und berechnen Sie die Ableitung $C'(t)$.

$$C\colon \boxed{[0,1]} \longrightarrow \mathbb{R}^2\colon t \longmapsto \boxed{\begin{pmatrix} -t+2 \\ 3t \end{pmatrix}} \qquad C'(t) = \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

(b) Sei V_α das vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Vektorfeld

$$V_\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha\mathrm{e}^{\alpha x_1 - x_2} + 3x_2 \\ -\mathrm{e}^{\alpha x_1 - x_2} + \alpha x_1 \end{pmatrix}.$$

Weiterhin sei

$$\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x_1,x_2) \mapsto \mathrm{e}^{3x_1-x_2} + 3x_1x_2.$$

Bestimmen Sie α so, dass Φ eine Potentialfunktion zum Vektorfeld V_α ist.

$$\alpha = \boxed{3}$$