Aufgabe 7 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Gegeben sei $\mathbb{R}^2$ mit Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = (0; e_1, e_2)$. Darin sind die Punkte P_0, P_1 und P_2 gegeben durch:

$$_{\mathbb{E}}P_0 = (3,2)^\intercal,\ _{\mathbb{E}}P_1 = (4,6)^\intercal,\ _{\mathbb{E}}P_2 = (4,4)^\intercal.$$

Gesucht ist nun ein zweites Koordinatensystem $\mathbb{F}$ mit

$$_{\mathbb{F}}P_0 = (0,0)^\intercal,\ _{\mathbb{F}}P_1 = (1,1)^\intercal,\ _{\mathbb{F}}P_2 = (1,-1)^\intercal.$$

Geben Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ und die Koordinatentransformation $_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ an:

$$\mathbb{F} = \boxed{\left(\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)} \qquad _{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix}1 & 0\\3 & 1\end{pmatrix} v + \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}}$$

Aufgabe 8 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Gegeben ist die vom reellen Parameter β abhängige Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$a_n := (1-\beta)^n.$$

Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(a) alternierend? $\boxed{\beta > 1}$

(b) streng monoton fallend? $\boxed{0 < \beta < 1}$

(c) beschränkt? $\boxed{0 \leqq \beta \leqq 2}$

(d) streng monoton steigend? $\boxed{\beta < 0}$

Scheinklausur — **Höhere Mathematik 1** — **8. 02. 2016**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** 0 ■1 ☐2 ☐3 ☐4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt. *Viel Erfolg!*

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Die Matrix A_t ist für $t \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$A_t = \begin{pmatrix}5 & 1\\0 & 3+4t\end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die Eigenwerte von A_t in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ an.

$$\boxed{\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 3+4t}$$

(b) Für welche Werte $t \in \mathbb{R}$ ist A_t invertierbar? $\boxed{\text{invertierbar für } t \in \mathbb{R} \setminus \{-\tfrac{3}{4}\}}$

(c) Für welche Werte $t \in \mathbb{R}$ ist A_t diagonalisierbar? $\boxed{\text{diagonalisierbar für } t \in \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{1}{2}\}}$

Aufgabe 3 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Gegeben ist die Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\intercal A x + c = 0\}$ mit

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -12 & 9 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = 0.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte λ_1, λ_2 von A und die zugehörige Transformationsmatrix F.

$\lambda_1 = \boxed{-3}$

$\lambda_2 = \boxed{3}$

$F = \boxed{\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}$

(b) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform und die Gestalt der Quadrik Q.

Euklidische Normalform	$-y_1^2 + y_2^2 = 0$
Gestalt	schneidendes Geradenpaar

Aufgabe 4 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

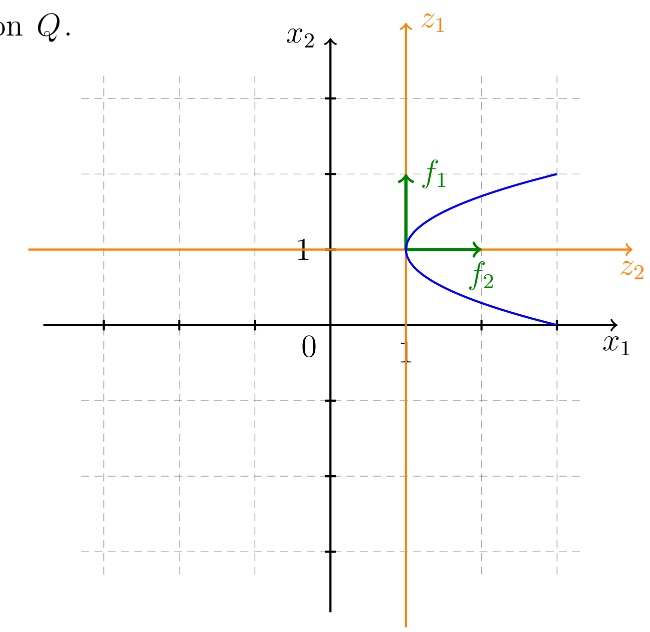
Gegeben ist die Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\intercal A x + 2a^\intercal x + c = 0\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad c = -12.$$

(a) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q.

$\boxed{-4z_1^2 + 2z_2 = 0}$

(b) Skizzieren Sie die Quadrik Q in Standardkoordinaten. Zeichnen Sie zudem das Koordinatensystem ein, welches zur oben bestimmten euklidischen Normalform gehört.



Aufgabe 5 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Gegeben sei der Doppelkegel

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1^2 + 4x_2^2 - x_3^2 = 0\}$$

und die vom Parameter $d \in \mathbb{R}$ abhängige Ebene $E_d = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = d\}$. Geben Sie, falls möglich, ein $d \in \mathbb{R}$ an, so dass der Schnitt $Q \cap E_d$ die jeweils angegebene Gestalt hat. Falls dies nicht möglich ist, tragen Sie „existiert nicht" in das Kästchen ein.

(a) Genau ein Punkt.	$d = 0$
(b) Eine Ellipse mit den Halbachsen $h_1 = 1$ und $h_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.	$d = \sqrt{3}$
(c) Zwei sich schneidende Geraden.	existiert nicht

Aufgabe 6 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie eine zu A konjugierte Diagonalmatrix D sowie eine orthogonale Transformationsmatrix T so, dass $T^\intercal A T = D$ ist.

$$D = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}} \qquad T = \boxed{\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$