Aufgabe 8 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Gegeben seien die folgenden Funktionen.

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^2 + 2xy + y^2 \qquad g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^2 + 4y^2 - 4$$

Berechnen Sie die Gradienten von f und g.

$\operatorname{grad} f(x,y) =$ ☐ $\qquad \operatorname{grad} g(x,y) =$ ☐

Geben Sie die drei Gleichungen an, die die Bedingungen von Lagrange für lokale Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ beschreiben:

☐

Welche der folgenden Kandidaten erfüllen die Bedingungen? Geben Sie gegebenenfalls dazu auch den Lagrange-Multiplikator λ an.

$p_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ ☐ Ja, mit $\lambda =$ ☐ ☐ Nein

$p_2 = \left(-\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ ☐ Ja, mit $\lambda =$ ☐ ☐ Nein

---

Aufgabe 9 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2$,

sowie die Kurve K mit der Parametrisierung $C\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 2+\cos(t) \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie den Anfangspunkt und den Endpunkt der Kurve K.

$C(0) =$ ☐ $\qquad C(\pi) =$ ☐

Berechnen Sie das folgende Kurvenintegral.

$$\int_K \operatorname{grad} f(x) \bullet \mathrm{d}\,x \quad = \quad \square$$

Scheinklausur **Höhere Mathematik 2** **9. 7. 2016**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ☐1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Aufgabe 2 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Gegeben seien die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \ : \ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 x_3 \\ x_1^2 \end{pmatrix} \qquad g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ : \ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sin(\pi y_2) \\ \mathrm{e}^{(-y_1^2)} \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von $h := g \circ f$:

$$\mathrm{J}\,h \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boxed{}$$

(b) Geben Sie die lineare Approximation von g im Punkt $a = (1,0)^\intercal$ an:

$$g \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \boxed{} + \boxed{} \begin{pmatrix} y_1 - 1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \mathrm{o}\left(\left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - a \right\| \right)$$

Aufgabe 3 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Es sind die folgenden Funktionen gegeben:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sinh\big(\sqrt[3]{2}\,x\big) - \sqrt[3]{2}\,x \quad \text{und} \quad g\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^{-3}\,.$$

(a) Bestimmen Sie die folgende Ableitungen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\, f\,(x) = \boxed{}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\, f\,(g(x)) = \boxed{}$$

(b) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 0} f(x)\, g(x) \ = \ \boxed{} \qquad \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{2}\, \ln\,(f(x) + 2) \ = \ \boxed{}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{z - \mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}} \right)^k$	$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} z - \mathrm{i} + 1 \right)^j$	$\sum_{n=4}^{\infty} \left(\sqrt{2} + \mathrm{i}^n \right)^n \left(\frac{z + 3}{1 + 2\mathrm{i}} \right)^n$
z_0			
ρ			

Aufgabe 5 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Berechnen Sie zum folgenden Vektorfeld f ein Potential U so, dass $U(0,0) = 5$ gilt.

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -3\sin\,(y^2 + 3x)\,\mathrm{e}^y \\ -2y\sin\,(y^2 + 3x)\,\mathrm{e}^y + \cos\,(y^2 + 3x)\,\mathrm{e}^y \end{pmatrix}$$

$$U\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \boxed{}$$

Aufgabe 6 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2

Bestimmen Sie die folgenden Integrale.

$\int \frac{\sin(\ln(x^2))}{3x}\,\mathrm{d}\,x$	
$\int \frac{5x^4 + 15x^2 + 4x}{x^5 + 5x^3 + 2x^2 + 1}\,\mathrm{d}\,x$	

Aufgabe 7 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Führen Sie die reelle Partialbruchzerlegung durch:

$$\frac{8x^2 + 9x + 18}{(x + 2)(x^2 + 4)} = \boxed{}$$

Aufgabe 8 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Gegeben seien die folgenden Funktionen.

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto 2x^2 + 4xy + 2y^2 \qquad g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto 4x^2 + y^2 - 4$$

Berechnen Sie die Gradienten von f und g.

$\operatorname{grad} f(x,y) =$ ☐ $\qquad \operatorname{grad} g(x,y) =$ ☐

Geben Sie die drei Gleichungen an, die die Bedingungen von Lagrange für lokale Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ beschreiben:

☐

Welche der folgenden Kandidaten erfüllen die Bedingungen? Geben Sie gegebenenfalls dazu auch den Lagrange-Multiplikator λ an.

$p_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$ ☐ Ja, mit $\lambda =$ ☐ ☐ Nein

$p_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ ☐ Ja, mit $\lambda =$ ☐ ☐ Nein

Aufgabe 9 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$,

sowie die Kurve K mit der Parametrisierung $C\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 2 - \sin(t) \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie den Anfangspunkt und den Endpunkt der Kurve K.

$C(0) =$ ☐ $\qquad C(\pi) =$ ☐

Berechnen Sie das folgende Kurvenintegral.

$$\int_K \operatorname{grad} f(x) \bullet \mathrm{d}\,x \quad = \quad \boxed{}$$

Scheinklausur **Höhere Mathematik 2** **9. 7. 2016**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ☐1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Gegeben seien die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \ : \ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 x_3 \\ x_1^2 \end{pmatrix} \qquad g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ : \ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{(-y_2^2)} \\ \cos(\pi y_1) \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von $h := g \circ f$:

$$\mathrm{J}\, h \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boxed{}$$

(b) Geben Sie die lineare Approximation von g im Punkt $a = (\frac{1}{2}, 1)^\intercal$ an:

$$g \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \boxed{} + \boxed{} \begin{pmatrix} y_1 - \frac{1}{2} \\ y_2 - 1 \end{pmatrix} + \mathrm{o}\left(\left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - a \right\| \right)$$

Aufgabe 3 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Es sind die folgenden Funktionen gegeben:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sinh\left(\sqrt[3]{3}\,x\right) - \sqrt[3]{3}\,x \quad \text{und} \quad g\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^{-3}.$$

(a) Bestimmen Sie die folgende Ableitungen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\, f(x) = \boxed{}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\, f(g(x)) = \boxed{}$$

(b) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 0} f(x)\, g(x) = \boxed{} \qquad \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{3}\, \ln\left(f(x) + 2\right) = \boxed{}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum\limits_{k=2}^{\infty} \left(\frac{2}{3}z - 2\mathrm{i} + 2\right)^k$	$\sum\limits_{j=0}^{\infty} \left(\frac{z+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^j$	$\sum\limits_{n=4}^{\infty} \left(\sqrt{3} + \mathrm{i}^n\right)^n \left(\frac{z-2}{1+\mathrm{i}}\right)^n$
z_0			
ρ			

Aufgabe 5 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Berechnen Sie zum folgenden Vektorfeld f ein Potential U so, dass $U(0,0) = 6$ gilt.

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2\sin\left(y^2 + 2x\right)\mathrm{e}^y \\ -2y\sin\left(y^2 + 2x\right)\mathrm{e}^y + \cos\left(y^2 + 2x\right)\mathrm{e}^y \end{pmatrix}$$

$$U\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \boxed{}$$

Aufgabe 6 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2

Bestimmen Sie die folgenden Integrale.

$\displaystyle\int \frac{\sin(\ln(x^2))}{2x}\,\mathrm{d}\,x$	
$\displaystyle\int \frac{5x^4 + 12x^2 + 6x}{x^5 + 4x^3 + 3x^2 + 1}\,\mathrm{d}\,x$	

Aufgabe 7 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Führen Sie die reelle Partialbruchzerlegung durch:

$$\frac{6x^2 - 5x + 25}{(x-2)(x^2+9)} = \boxed{}$$

Aufgabe 8 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Gegeben seien die folgenden Funktionen.

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto -x^2 - 2xy - y^2 \qquad g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^2 + 9y^2 - 5$$

Berechnen Sie die Gradienten von f und g.

$\operatorname{grad} f(x,y) =$ ☐ $\qquad \operatorname{grad} g(x,y) =$ ☐

Geben Sie die drei Gleichungen an, die die Bedingungen von Lagrange für lokale Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ beschreiben:

☐

Welche der folgenden Kandidaten erfüllen die Bedingungen? Geben Sie gegebenenfalls dazu auch den Lagrange-Multiplikator λ an.

$p_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ☐ Ja, mit $\lambda =$ ☐ ☐ Nein

$p_2 = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$ ☐ Ja, mit $\lambda =$ ☐ ☐ Nein

Aufgabe 9 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2$,

sowie die Kurve K mit der Parametrisierung $C\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 2-\cos(t) \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie den Anfangspunkt und den Endpunkt der Kurve K.

$C(0) =$ ☐ $\qquad C(\pi) =$ ☐

Berechnen Sie das folgende Kurvenintegral.

$$\int_K \operatorname{grad} f(x) \bullet \mathrm{d}\,x \quad = \quad \square$$

Scheinklausur **Höhere Mathematik 2** **9. 7. 2016**

☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ☐1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Gegeben seien die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \; : \; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 x_1 \\ x_3^2 \end{pmatrix} \qquad g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \; : \; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\pi y_2) \\ -2\mathrm{e}^{(y_1^2)} \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von $h := g \circ f$:

$$\mathrm{J}\, h \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boxed{}$$

(b) Geben Sie die lineare Approximation von g im Punkt $a = (1, \frac{1}{2})^\intercal$ an:

$$g \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \boxed{} + \boxed{} \begin{pmatrix} y_1 - 1 \\ y_2 - \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \mathrm{o}\left(\left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - a \right\| \right)$$

Aufgabe 3 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Es sind die folgenden Funktionen gegeben:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sinh\left(\sqrt[3]{5}\, x\right) - \sqrt[3]{5}\, x \quad \text{und} \quad g\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^{-3}\,.$$

(a) Bestimmen Sie die folgende Ableitungen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, x} f(x) = \boxed{}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, x} f(g(x)) = \boxed{}$$

(b) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x \to 0} f(x)\, g(x) = \boxed{} \qquad \lim_{x \to 0} \sqrt[3]{5}\, \ln\left(f(x) + 2\right) = \boxed{}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{3}{5} z - 3\mathrm{i} + 3 \right)^k$	$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{1+2\mathrm{i}} \right)^j$	$\sum_{n=4}^{\infty} \left(\sqrt{5} + \mathrm{i}^n \right)^n \left(\frac{z - \sqrt{7}}{1 - 2\mathrm{i}} \right)^n$
z_0			
ρ			

Aufgabe 5 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Berechnen Sie zum folgenden Vektorfeld f ein Potential U so, dass $U(0,0) = 4$ gilt.

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -5\sin\left(y^2 + 5x\right) \mathrm{e}^y \\ -2y \sin\left(y^2 + 5x\right) \mathrm{e}^y + \cos\left(y^2 + 5x\right) \mathrm{e}^y \end{pmatrix}$$

$$U\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \boxed{}$$

Aufgabe 6 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2

Bestimmen Sie die folgenden Integrale.

$\displaystyle\int \frac{\cos(\ln(x^2))}{3x}\, \mathrm{d}\, x$	
$\displaystyle\int \frac{5x^4 + 9x^2 + 14x}{x^5 + 3x^3 + 7x^2 + 1}\, \mathrm{d}\, x$	

Aufgabe 7 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Führen Sie die reelle Partialbruchzerlegung durch:

$$\frac{7x^2 + 5x + 13}{(x+1)(x^2+4)} = \boxed{}$$

Aufgabe 8 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Gegeben seien die folgenden Funktionen.

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto -2x^2 - 4xy - 2y^2 \qquad g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto 9x^2 + y^2 - 5$$

Berechnen Sie die Gradienten von f und g.

$\operatorname{grad} f(x,y) =$ ☐ $\qquad \operatorname{grad} g(x,y) =$ ☐

Geben Sie die drei Gleichungen an, die die Bedingungen von Lagrange für lokale Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ beschreiben:

☐

Welche der folgenden Kandidaten erfüllen die Bedingungen? Geben Sie gegebenenfalls dazu auch den Lagrange-Multiplikator λ an.

$p_1 = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ ☐ Ja, mit $\lambda =$ ☐ ☐ Nein

$p_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ☐ Ja, mit $\lambda =$ ☐ ☐ Nein

Aufgabe 9 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2$,

sowie die Kurve K mit der Parametrisierung $C\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 2+\sin(t) \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie den Anfangspunkt und den Endpunkt der Kurve K.

$C(0) =$ ☐ $\qquad C(\pi) =$ ☐

Berechnen Sie das folgende Kurvenintegral.

$$\int_K \operatorname{grad} f(x) \bullet \mathrm{d}\,x \quad = \quad \boxed{}$$

Scheinklausur **Höhere Mathematik 2** **9. 7. 2016**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ☐1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Gegeben seien die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \;:\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 x_1 \\ x_3^2 \end{pmatrix} \qquad g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \;:\; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{(y_2^2)} \\ 3\sin(\pi y_1) \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von $h := g \circ f$:

$$\mathrm{J}\, h \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boxed{}$$

(b) Geben Sie die lineare Approximation von g im Punkt $a = (1,1)^\intercal$ an:

$$g\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \boxed{} + \boxed{} \begin{pmatrix} y_1 - 1 \\ y_2 - 1 \end{pmatrix} + \mathrm{o}\left(\left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - a \right\| \right)$$

Aufgabe 3 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Es sind die folgenden Funktionen gegeben:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sinh\left(\sqrt[3]{7}\,x\right) - \sqrt[3]{7}\,x \quad \text{und} \quad g\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^{-3}.$$

(a) Bestimmen Sie die folgende Ableitungen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} f(x) = \boxed{}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} f(g(x)) = \boxed{}$$

(b) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 0} f(x)\,g(x) = \boxed{} \qquad \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{7}\,\ln\left(f(x)+2\right) = \boxed{}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{z+1}{1-2\mathrm{i}}\right)^k$	$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{5}{7}z - 5\mathrm{i} + 5\right)^j$	$\sum_{n=4}^{\infty} \left(\sqrt{7} + \mathrm{i}^n\right)^n \left(\frac{z-2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^n$
z_0			
ρ			

Aufgabe 5 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Berechnen Sie zum folgenden Vektorfeld f ein Potential U so, dass $U(0,0) = 7$ gilt.

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -4\sin\left(y^2+4x\right)\mathrm{e}^y \\ -2y\sin\left(y^2+4x\right)\mathrm{e}^y + \cos\left(y^2+4x\right)\mathrm{e}^y \end{pmatrix}$$

$$U\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \boxed{}$$

Aufgabe 6 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2

Bestimmen Sie die folgenden Integrale.

$\int \frac{\cos(\ln(x^2))}{2x}\,\mathrm{d}\,x$	
$\int \frac{5x^4 + 6x^2 + 18x}{x^5 + 2x^3 + 9x^2 + 1}\,\mathrm{d}\,x$	

Aufgabe 7 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Führen Sie die reelle Partialbruchzerlegung durch:

$$\frac{5x^2 - 2x + 17}{(x-1)(x^2+9)} = \boxed{}$$