Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studien-gang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte	/1	/4	/4	/5	/8	/5	/4	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und nicht eingesammelt.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F_c = (f_1, f_2, f_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1-c & 1 \\ 0 & 1 & c \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Es sei die lineare Abbildung φ gegeben als $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon v \mapsto Av$. Bestimmen Sie:

$\mathrm{Rg}(A) =$ $\qquad$ $\dim(\mathrm{Kern}\,(\varphi)) =$

(b) Bestimmen Sie die Determinante von F_c.

$\det(F_c) =$

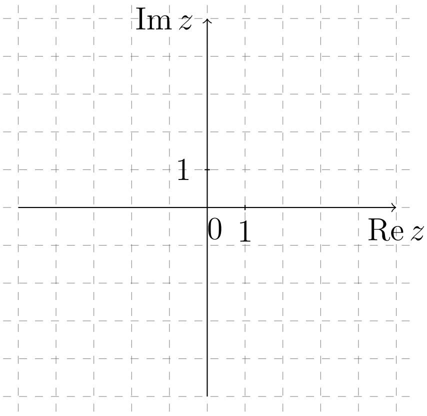
(c) Bestimmen Sie c so, dass die Spaltenvektoren von F_c jeweils paarweise orthogonal sind.

$c =$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Für $s, t \in \mathbb{R}$ seien folgende Teilmengen von $\mathbb{C}$ gegeben.

$$V_s := \left\{ 2 + \mathrm{i} + \lambda(2 + 3\mathrm{i} + s\mathrm{i}) \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \quad W_t := \left\{ 3\mathrm{i} - t\mathrm{i} + \lambda(1 + 4\mathrm{i} - 2t\mathrm{i}) \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

(a) Skizzieren Sie V_1 und W_2.



(b) Für welches $t \in \mathbb{R}$ gilt $V_{-3} = W_t$? $t =$

(c) Für welches $s \in \mathbb{R}$ ist V_s ein reeller Untervektorraum von $\mathbb{C}$? $s =$

Aufgabe 4 (*5 Punkte*) Gegeben ist der Vektorraum $\mathbb{C}^2$ über $\mathbb{C}$ mit den Basen

$$E\colon \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B\colon \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C\colon \begin{pmatrix} -2 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die folgenden Matrizen:

$${}_E\mathrm{id}_B = \qquad {}_C\mathrm{id}_E = \qquad {}_C\mathrm{id}_B =$$

(b) Gegeben sei die lineare Abbildung α in Koordinaten bezüglich E als

$$\alpha : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \colon v \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2\mathrm{i} \end{pmatrix} v$$

.

Bestimmen Sie die folgenden Matrizen:

$${}_E\alpha_C = \qquad {}_C\alpha_C =$$

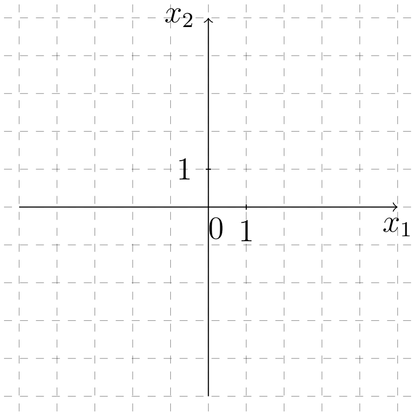
Aufgabe 5 (*8 Punkte*) Gegeben sind bezüglich des Standardkoordinatensystems $\mathbb{E}$ die Quadriken

$$\mathcal{Q}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -2x_1^2 + 8x_1 + x_2 - 9 = 0 \right\} \text{ und } \mathcal{Q}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -2x_1^2 - 8x_1 + x_2 - 7 = 0 \right\}.$$

(a) Bestimmen Sie jeweils ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$, in dem die Gleichung der Quadrik euklidische Normalform hat. Geben Sie diese Normalform sowie F und t für die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon v \mapsto Fv + t$ an. Skizzieren Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ sowie die Quadrik im Standardkoordinatensystem.

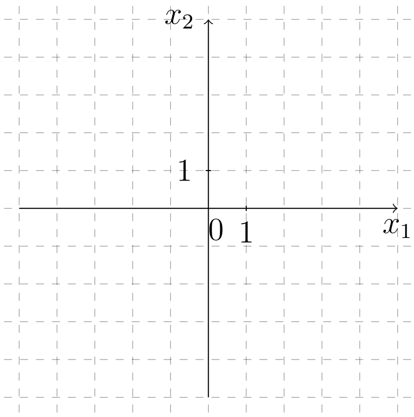
euklidische Normalform:

Zu $\mathcal{Q}_1$: $\boxed{}$ $F = \boxed{}$ $t = \boxed{}$



euklidische Normalform:

Zu $\mathcal{Q}_2$: $\boxed{}$ $F = \boxed{}$ $t = \boxed{}$



(b) Bestimmen Sie eine uneigentliche Isometrie $\alpha \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon v \mapsto Av + s$, die $\mathcal{Q}_1$ auf $\mathcal{Q}_2$ abbildet.

Isometrie: $\alpha \colon v \mapsto \boxed{}\; v + \boxed{}$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2\mathrm{i} & 2\mathrm{i} & -2 \\ 0 & 0 & 2\mathrm{i} \\ 0 & 4\mathrm{i} & -4 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Ergebnisse in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

(a) Bestimmen Sie den Eigenwert λ_1 zum Eigenvektor $v_1 = (1, 1, 1 + \mathrm{i})^\intercal$.

$$\lambda_1 = \boxed{}$$

(b) Geben Sie die Determinante und die Spur von A an.

$$\det(A) = \boxed{} \qquad \mathrm{Sp}(A) = \boxed{}$$

(c) Bestimmen Sie die restlichen Eigenwerte λ_2, $\lambda_3 \in \mathbb{C}$ der Matrix A.

$$\lambda_2 = \boxed{} \qquad \lambda_3 = \boxed{}$$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte. Tragen Sie „divergent" ein, falls kein Grenzwert existiert.

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{} \qquad \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} (-2)^k = \boxed{}$$

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \left(-\frac{1}{3}\right)^k = \boxed{} \qquad \lim_{n\in\mathbb{N}} 2\cos(2\pi n) = \boxed{}$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte	/1	/4	/4	/5	/8	/5	/4	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und nicht eingesammelt.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: $\boxed{}$ **Gruppennr.:** $\boxed{}$

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F_c = (f_1, f_2, f_3) = \begin{pmatrix} 1+c & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -c \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Es sei die lineare Abbildung φ gegeben als $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto Av$. Bestimmen Sie:

$$\operatorname{Rg}(A) = \boxed{} \qquad \dim(\operatorname{Kern}(\varphi)) = \boxed{}$$

(b) Bestimmen Sie die Determinante von F_c.

$$\det(F_c) = \boxed{}$$

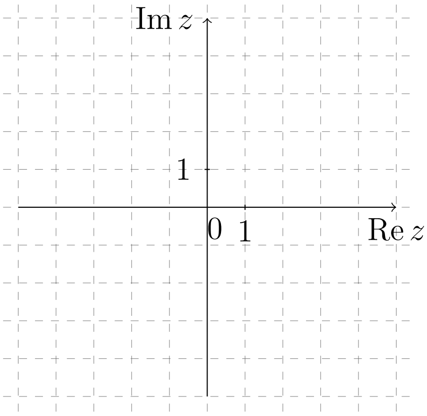
(c) Bestimmen Sie c so, dass die Spaltenvektoren von F_c jeweils paarweise orthogonal sind.

$$c = \boxed{}$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Für $s, t \in \mathbb{R}$ seien folgende Teilmengen von $\mathbb{C}$ gegeben.

$$V_s := \left\{ 2\mathrm{i} - s + \lambda(3 + 3\mathrm{i} - s) \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \quad W_t := \left\{ -3 + \mathrm{i} + \lambda(2 + t - 2\mathrm{i}) \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

(a) Skizzieren Sie V_3 und W_{-1}.



(b) Für welches $s \in \mathbb{R}$ gilt $V_s = W_{-2}$? $s =$

(c) Für welches $t \in \mathbb{R}$ ist W_t ein reeller Untervektorraum von $\mathbb{C}$? $t =$

Aufgabe 4 (*5 Punkte*) Gegeben ist der Vektorraum $\mathbb{C}^2$ über $\mathbb{C}$ mit den Basen

$$E\colon \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B\colon \begin{pmatrix} -2 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C\colon \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die folgenden Matrizen:

$${}_E\mathrm{id}_B = \qquad {}_C\mathrm{id}_E = \qquad {}_C\mathrm{id}_B =$$

(b) Gegeben sei die lineare Abbildung α in Koordinaten bezüglich E als

$$\alpha : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \colon v \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2\mathrm{i} \end{pmatrix} v$$

.

Bestimmen Sie die folgenden Matrizen:

$${}_E\alpha_C = \qquad {}_C\alpha_C =$$

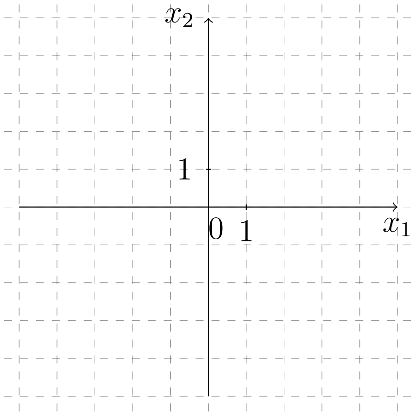
Aufgabe 5 (*8 Punkte*) Gegeben sind bezüglich des Standardkoordinatensystems $\mathbb{E}$ die Quadriken

$$\mathcal{Q}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -2x_1^2 - 8x_1 + x_2 - 9 = 0 \right\} \text{ und } \mathcal{Q}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2x_1^2 - 8x_1 + x_2 + 9 = 0 \right\}.$$

(a) Bestimmen Sie jeweils ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$, in dem die Gleichung der Quadrik euklidische Normalform hat. Geben Sie diese Normalform sowie F und t für die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon v \mapsto Fv + t$ an. Skizzieren Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ sowie die Quadrik im Standardkoordinatensystem.

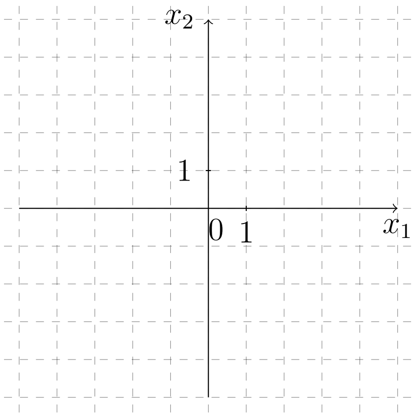
euklidische Normalform:

Zu $\mathcal{Q}_1$: $F =$ $t =$



euklidische Normalform:

Zu $\mathcal{Q}_2$: $F =$ $t =$



(b) Bestimmen Sie eine uneigentliche Isometrie $\alpha \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon v \mapsto Av + s$, die $\mathcal{Q}_1$ auf $\mathcal{Q}_2$ abbildet.

Isometrie: $\alpha \colon v \mapsto$ $v \; +$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3\mathrm{i} & 0 & -3\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 5\mathrm{i} \\ 0 & 2\mathrm{i} & -2 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Ergebnisse in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

(a) Bestimmen Sie den Eigenwert λ_1 zum Eigenvektor $v_1 = (6\mathrm{i}, 3 - \mathrm{i}, 2)^\mathsf{T}$.

$\lambda_1 =$ $\boxed{}$

(b) Geben Sie die Determinante und die Spur von A an.

$\det(A) =$ $\boxed{}$ $\quad$ $\mathrm{Sp}(A) =$ $\boxed{}$

(c) Bestimmen Sie die restlichen Eigenwerte $\lambda_2,\ \lambda_3 \in \mathbb{C}$ der Matrix A.

$\lambda_2 =$ $\boxed{}$ $\quad$ $\lambda_3 =$ $\boxed{}$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte. Tragen Sie „divergent“ ein, falls kein Grenzwert existiert.

$\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} 3\cos(2\pi n) =$ $\boxed{}$ $\quad$ $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{4} - \frac{1}{2} =$ $\boxed{}$

$\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{N} (-3)^k =$ $\boxed{}$ $\quad$ $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{N} \left(-\frac{1}{4}\right)^k =$ $\boxed{}$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studiengang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte	/1	/4	/4	/5	/8	/5	/4	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und nicht eingesammelt.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: ____ **Gruppennr.:** ____

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F_c = (f_1, f_2, f_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2-c \\ 0 & c-1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Es sei die lineare Abbildung φ gegeben als $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto Av$. Bestimmen Sie:

$\mathrm{Rg}(A) =$ ____ $\dim(\mathrm{Kern}\,(\varphi)) =$ ____

(b) Bestimmen Sie die Determinante von F_c.

$\det(F_c) =$ ____

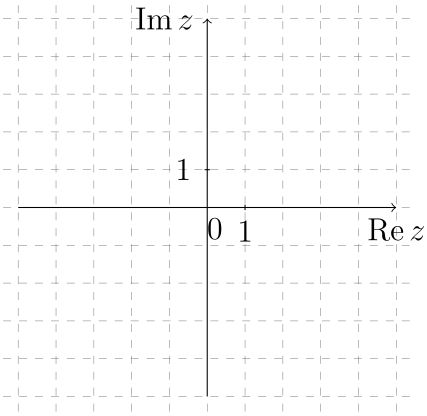
(c) Bestimmen Sie c so, dass die Spaltenvektoren von F_c jeweils paarweise orthogonal sind.

$c =$ ____

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Für $s, t \in \mathbb{R}$ seien folgende Teilmengen von $\mathbb{C}$ gegeben.

$$V_s := \left\{ 1 - 2\mathrm{i} + \lambda(1 + \mathrm{i} - s\mathrm{i}) \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \quad W_t := \left\{ -4\mathrm{i} - t\mathrm{i} + \lambda(1 - 4\mathrm{i} - 2t\mathrm{i}) \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

(a) Skizzieren Sie V_4 und W_{-2}.



(b) Für welches $t \in \mathbb{R}$ gilt $V_1 = W_t$? $t =$

(c) Für welches $s \in \mathbb{R}$ ist V_s ein reeller Untervektorraum von $\mathbb{C}$? $s =$

Aufgabe 4 (*5 Punkte*) Gegeben ist der Vektorraum $\mathbb{C}^2$ über $\mathbb{C}$ mit den Basen

$$E\colon \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B\colon \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C\colon \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die folgenden Matrizen:

$${}_E\mathrm{id}_B = \boxed{} \qquad {}_C\mathrm{id}_E = \boxed{} \qquad {}_C\mathrm{id}_B = \boxed{}$$

(b) Gegeben sei die lineare Abbildung α in Koordinaten bezüglich E als

$$\alpha : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \colon v \mapsto \begin{pmatrix} -2\mathrm{i} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v$$

.

Bestimmen Sie die folgenden Matrizen:

$${}_E\alpha_C = \boxed{} \qquad {}_C\alpha_C = \boxed{}$$

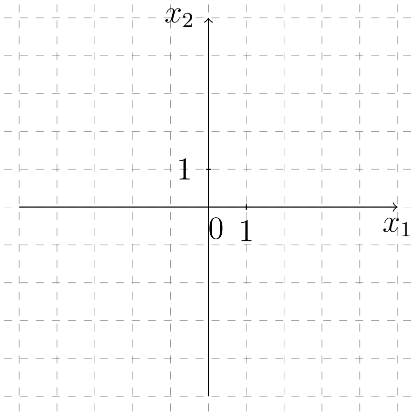
Aufgabe 5 (*8 Punkte*) Gegeben sind bezüglich des Standardkoordinatensystems $\mathbb{E}$ die Quadriken

$$\mathcal{Q}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2x_1^2 - 12x_1 + x_2 + 17 = 0 \right\} \text{ und } \mathcal{Q}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -2x_1^2 - 12x_1 + x_2 - 17 = 0 \right\}.$$

(a) Bestimmen Sie jeweils ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$, in dem die Gleichung der Quadrik euklidische Normalform hat. Geben Sie diese Normalform sowie F und t für die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon v \mapsto Fv + t$ an. Skizzieren Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ sowie die Quadrik im Standardkoordinatensystem.

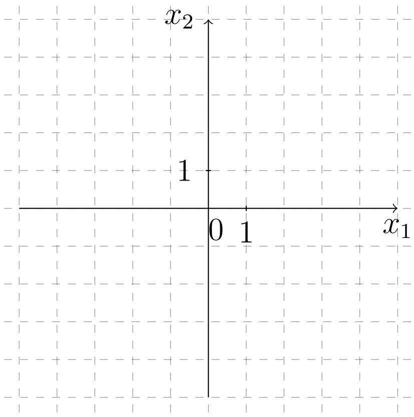
euklidische Normalform:

Zu $\mathcal{Q}_1$: $\boxed{}$ $F = \boxed{}$ $t = \boxed{}$



euklidische Normalform:

Zu $\mathcal{Q}_2$: $\boxed{}$ $F = \boxed{}$ $t = \boxed{}$



(b) Bestimmen Sie eine uneigentliche Isometrie $\alpha \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon v \mapsto Av + s$, die $\mathcal{Q}_1$ auf $\mathcal{Q}_2$ abbildet.

Isometrie: $\alpha \colon v \mapsto \boxed{}\; v \;+\; \boxed{}$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -2\mathrm{i} & 2 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 2\mathrm{i} \\ 0 & 4\mathrm{i} & 4 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Ergebnisse in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

(a) Bestimmen Sie den Eigenwert λ_1 zum Eigenvektor $v_1 = (1, 1+\mathrm{i}, 2)^{\mathsf{T}}$.

$$\lambda_1 = \boxed{}$$

(b) Geben Sie die Determinante und die Spur von A an.

$$\det(A) = \boxed{} \qquad \mathrm{Sp}(A) = \boxed{}$$

(c) Bestimmen Sie die restlichen Eigenwerte $\lambda_2,\ \lambda_3 \in \mathbb{C}$ der Matrix A.

$$\lambda_2 = \boxed{} \qquad \lambda_3 = \boxed{}$$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte. Tragen Sie „divergent“ ein, falls kein Grenzwert existiert.

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \boxed{} \qquad \lim_{n\in\mathbb{N}} -2\cos(2\pi n) = \boxed{}$$

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{n+1}}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{} \qquad \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} (-4)^k = \boxed{}$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte	/1	/4	/4	/5	/8	/5	/4	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und nicht eingesammelt.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: $\boxed{}$ **Gruppennr.:** $\boxed{}$

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F_c = (f_1, f_2, f_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2+c & 1 \\ 0 & 1 & -c-1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Es sei die lineare Abbildung φ gegeben als $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto Av$. Bestimmen Sie:

$$\mathrm{Rg}(A) = \boxed{} \qquad \dim(\mathrm{Kern}\,(\varphi)) = \boxed{}$$

(b) Bestimmen Sie die Determinante von F_c.

$$\det\,(F_c) = \boxed{}$$

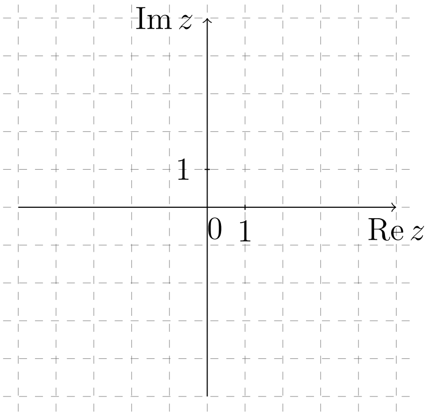
(c) Bestimmen Sie c so, dass die Spaltenvektoren von F_c jeweils paarweise orthogonal sind.

$$c = \boxed{}$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Für $s, t \in \mathbb{R}$ seien folgende Teilmengen von $\mathbb{C}$ gegeben.

$$V_s := \left\{ 2\mathrm{i} - s + \lambda(s + 3 + 3\mathrm{i}) \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \quad W_t := \left\{ 3 + 4\mathrm{i} + \lambda(t - 2 - 4\mathrm{i}) \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

(a) Skizzieren Sie V_{-3} und W_{-6}.



(b) Für welches $s \in \mathbb{R}$ gilt $V_s = W_2$? $s =$

(c) Für welches $t \in \mathbb{R}$ ist W_t ein reeller Untervektorraum von $\mathbb{C}$? $t =$

Aufgabe 4 (*5 Punkte*) Gegeben ist der Vektorraum $\mathbb{C}^2$ über $\mathbb{C}$ mit den Basen

$$E\colon \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B\colon \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C\colon \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die folgenden Matrizen:

$${}_E\mathrm{id}_B = \qquad {}_C\mathrm{id}_E = \qquad {}_C\mathrm{id}_B =$$

(b) Gegeben sei die lineare Abbildung α in Koordinaten bezüglich E als

$$\alpha : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \colon v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} v$$

.

Bestimmen Sie die folgenden Matrizen:

$${}_E\alpha_C = \qquad {}_C\alpha_C =$$

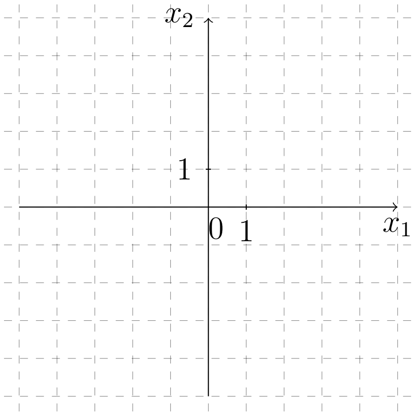
Aufgabe 5 (*8 Punkte*) Gegeben sind bezüglich des Standardkoordinatensystems $\mathbb{E}$ die Quadriken

$$\mathcal{Q}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2x_1^2 + 12x_1 + x_2 + 19 = 0 \right\} \text{ und } \mathcal{Q}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2x_1^2 - 12x_1 + x_2 + 17 = 0 \right\}.$$

(a) Bestimmen Sie jeweils ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$, in dem die Gleichung der Quadrik euklidische Normalform hat. Geben Sie diese Normalform sowie F und t für die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon v \mapsto Fv + t$ an. Skizzieren Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ sowie die Quadrik im Standardkoordinatensystem.

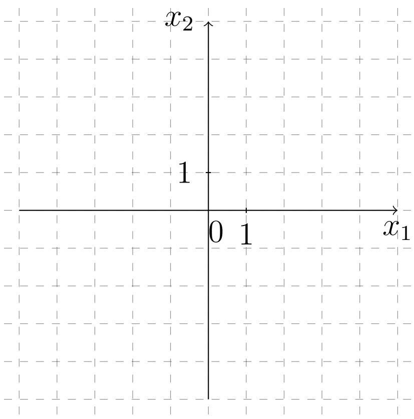
euklidische Normalform:

Zu $\mathcal{Q}_1$: $\boxed{}$ $F = \boxed{}$ $t = \boxed{}$



euklidische Normalform:

Zu $\mathcal{Q}_2$: $\boxed{}$ $F = \boxed{}$ $t = \boxed{}$



(b) Bestimmen Sie eine uneigentliche Isometrie $\alpha \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon v \mapsto Av + s$, die $\mathcal{Q}_1$ auf $\mathcal{Q}_2$ abbildet.

Isometrie: $\alpha \colon v \mapsto \boxed{}\, v + \boxed{}$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -3\mathrm{i} & 0 & 3\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 5\mathrm{i} \\ 0 & 2\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Ergebnisse in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

(a) Bestimmen Sie den Eigenwert λ_1 zum Eigenvektor $v_1 = (6\mathrm{i}, -3 + \mathrm{i}, 2)^\mathsf{T}$.

$\lambda_1 = \boxed{}$

(b) Geben Sie die Determinante und die Spur von A an.

$\det(A) = \boxed{}$ $\quad$ $\mathrm{Sp}(A) = \boxed{}$

(c) Bestimmen Sie die restlichen Eigenwerte λ_2, $\lambda_3 \in \mathbb{C}$ der Matrix A.

$\lambda_2 = \boxed{}$ $\quad$ $\lambda_3 = \boxed{}$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte. Tragen Sie „divergent“ ein, falls kein Grenzwert existiert.

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} (-5)^k = \boxed{} \qquad \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \boxed{}$$

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} -3\cos(2\pi n) = \boxed{} \qquad \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{n+1}}{4} - \frac{1}{2} = \boxed{}$$
