Name, Vorname: [ ] **Matrikel-Nummer:** [ ] **Studien-gang:** [ ]

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte	/1	/4	/4	/5	/8	/5	/4	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und nicht eingesammelt.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: [ ] **Gruppennr.:** [ ]

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F_c = (f_1, f_2, f_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1-c & 1 \\ 0 & 1 & c \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Es sei die lineare Abbildung φ gegeben als $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon v \mapsto Av$. Bestimmen Sie:

$\mathrm{Rg}(A) = \boxed{2}$ $\quad \dim(\mathrm{Kern}\,(\varphi)) = \boxed{1}$

(b) Bestimmen Sie die Determinante von F_c.

$\det(F_c) = \boxed{-2 - c^2}$

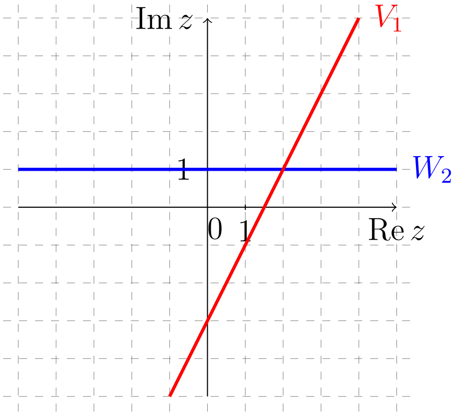
(c) Bestimmen Sie c so, dass die Spaltenvektoren von F_c jeweils paarweise orthogonal sind.

$c = \boxed{2}$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Für $s, t \in \mathbb{R}$ seien folgende Teilmengen von $\mathbb{C}$ gegeben.

$$V_s := \left\{ 2 + \mathrm{i} + \lambda(2 + 3\mathrm{i} + s\mathrm{i}) \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \quad W_t := \left\{ 3\mathrm{i} - t\mathrm{i} + \lambda(1 + 4\mathrm{i} - 2t\mathrm{i}) \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

(a) Skizzieren Sie V_1 und W_2.



(b) Für welches $t \in \mathbb{R}$ gilt $V_{-3} = W_t$? $t = \boxed{2}$

(c) Für welches $s \in \mathbb{R}$ ist V_s ein reeller Untervektorraum von $\mathbb{C}$? $s = \boxed{-2}$

Aufgabe 4 (*5 Punkte*) Gegeben ist der Vektorraum $\mathbb{C}^2$ über $\mathbb{C}$ mit den Basen

$$E\colon \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B\colon \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C\colon \begin{pmatrix} -2 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die folgenden Matrizen:

$${}_E\mathrm{id}_B = \boxed{\begin{pmatrix} \mathrm{i} & -2 \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}} \quad {}_C\mathrm{id}_E = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ -1 & 2\mathrm{i} \end{pmatrix}} \quad {}_C\mathrm{id}_B = \boxed{\begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 1 \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}}$$

(b) Gegeben sei die lineare Abbildung α in Koordinaten bezüglich E als

$$\alpha : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 : v \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2\mathrm{i} \end{pmatrix} v$$

.

Bestimmen Sie die folgenden Matrizen:

$${}_E\alpha_C = \boxed{\begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \qquad {}_C\alpha_C = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -2\mathrm{i} \end{pmatrix}}$$

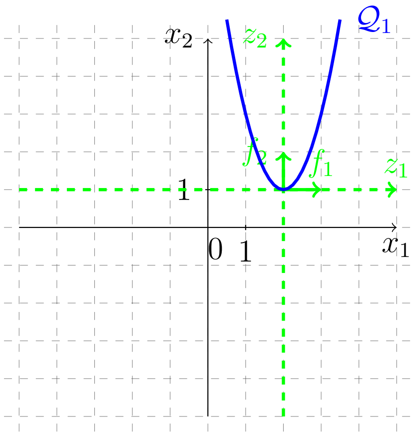
Aufgabe 5 (*8 Punkte*) Gegeben sind bezüglich des Standardkoordinatensystems $\mathbb{E}$ die Quadriken

$$\mathcal{Q}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -2x_1^2 + 8x_1 + x_2 - 9 = 0 \right\} \text{ und } \mathcal{Q}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -2x_1^2 - 8x_1 + x_2 - 7 = 0 \right\}.$$

(a) Bestimmen Sie jeweils ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$, in dem die Gleichung der Quadrik euklidische Normalform hat. Geben Sie diese Normalform sowie F und t für die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon v \mapsto Fv + t$ an. Skizzieren Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ sowie die Quadrik im Standardkoordinatensystem.

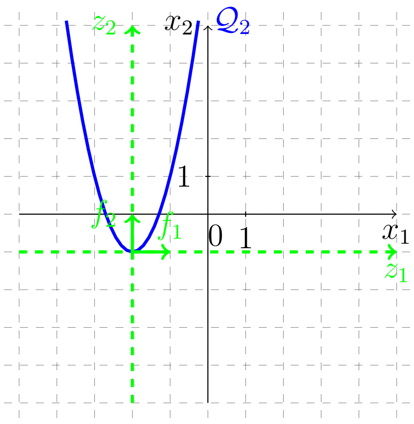
euklidische Normalform:

Zu $\mathcal{Q}_1$: $\boxed{-4z_1^2 + 2z_2 = 0}$ $\quad F = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$ $\quad t = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$



euklidische Normalform:

Zu $\mathcal{Q}_2$: $\boxed{-4z_1^2 + 2z_2 = 0}$ $\quad F = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$ $\quad t = \boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}}$



(b) Bestimmen Sie eine uneigentliche Isometrie $\alpha \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon v \mapsto Av + s$, die $\mathcal{Q}_1$ auf $\mathcal{Q}_2$ abbildet.

Isometrie: $\alpha \colon v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \, v \; + \; \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}}$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2\mathrm{i} & 2\mathrm{i} & -2 \\ 0 & 0 & 2\mathrm{i} \\ 0 & 4\mathrm{i} & -4 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Ergebnisse in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

(a) Bestimmen Sie den Eigenwert λ_1 zum Eigenvektor $v_1 = (1, 1, 1 + \mathrm{i})^\mathsf{T}$.

$$\lambda_1 = \boxed{-2 + 2\mathrm{i}}$$

(b) Geben Sie die Determinante und die Spur von A an.

$$\det(A) = \boxed{16\mathrm{i}} \qquad \mathrm{Sp}(A) = \boxed{-4 + 2\mathrm{i}}$$

(c) Bestimmen Sie die restlichen Eigenwerte $\lambda_2,\ \lambda_3 \in \mathbb{C}$ der Matrix A.

$$\lambda_2 = \boxed{-2 - 2\mathrm{i}} \qquad \lambda_3 = \boxed{2\mathrm{i}}$$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte. Tragen Sie „divergent" ein, falls kein Grenzwert existiert.

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{\text{divergent}} \qquad \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} (-2)^k = \boxed{\text{divergent}}$$

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \left(-\frac{1}{3}\right)^k = \boxed{\frac{3}{4}} \qquad \lim_{n\in\mathbb{N}} 2\cos(2\pi n) = \boxed{2}$$

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studiengang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte	/1	/4	/4	/5	/8	/5	/4	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und nicht eingesammelt.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F_c = (f_1, f_2, f_3) = \begin{pmatrix} 1+c & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -c \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Es sei die lineare Abbildung φ gegeben als $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto Av$. Bestimmen Sie:

$\operatorname{Rg}(A) = \boxed{1}$ $\quad$ $\dim(\operatorname{Kern}(\varphi)) = \boxed{2}$

(b) Bestimmen Sie die Determinante von F_c.

$\det(F_c) = \boxed{c^2 + 2}$

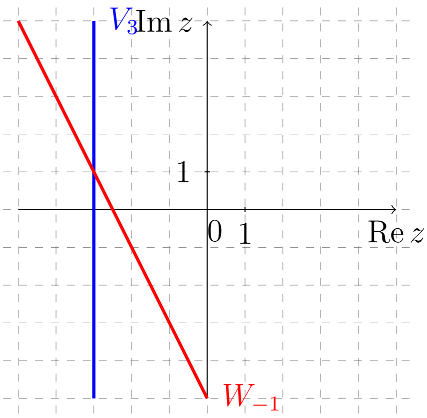
(c) Bestimmen Sie c so, dass die Spaltenvektoren von F_c jeweils paarweise orthogonal sind.

$c = \boxed{-2}$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Für $s, t \in \mathbb{R}$ seien folgende Teilmengen von $\mathbb{C}$ gegeben.

$$V_s := \left\{ 2\mathrm{i} - s + \lambda(3 + 3\mathrm{i} - s) \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \quad W_t := \left\{ -3 + \mathrm{i} + \lambda(2 + t - 2\mathrm{i}) \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

(a) Skizzieren Sie V_3 und W_{-1}.



(b) Für welches $s \in \mathbb{R}$ gilt $V_s = W_{-2}$? $s = \boxed{3}$

(c) Für welches $t \in \mathbb{R}$ ist W_t ein reeller Untervektorraum von $\mathbb{C}$? $t = \boxed{4}$

Aufgabe 4 (*5 Punkte*) Gegeben ist der Vektorraum $\mathbb{C}^2$ über $\mathbb{C}$ mit den Basen

$$E\colon \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B\colon \begin{pmatrix} -2 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C\colon \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die folgenden Matrizen:

$$ {}_E\mathrm{id}_B = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}} \quad {}_C\mathrm{id}_E = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 2\mathrm{i} \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}} \quad {}_C\mathrm{id}_B = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ 1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}}$$

(b) Gegeben sei die lineare Abbildung α in Koordinaten bezüglich E als

$$\alpha : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 : v \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2\mathrm{i} \end{pmatrix} v$$

.

Bestimmen Sie die folgenden Matrizen:

$$ {}_E\alpha_C = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} \qquad {}_C\alpha_C = \boxed{\begin{pmatrix} -2\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}}$$

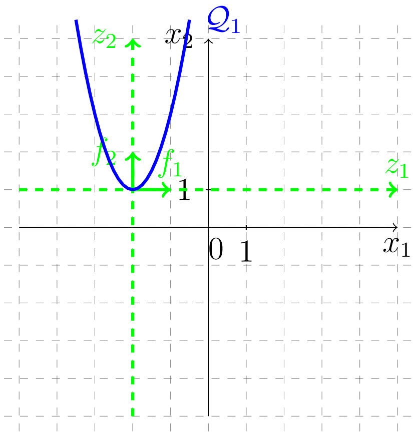
Aufgabe 5 (*8 Punkte*) Gegeben sind bezüglich des Standardkoordinatensystems $\mathbb{E}$ die Quadriken

$$\mathcal{Q}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -2x_1^2 - 8x_1 + x_2 - 9 = 0 \right\} \text{ und } \mathcal{Q}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2x_1^2 - 8x_1 + x_2 + 9 = 0 \right\}.$$

(a) Bestimmen Sie jeweils ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$, in dem die Gleichung der Quadrik euklidische Normalform hat. Geben Sie diese Normalform sowie F und t für die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon v \mapsto Fv + t$ an. Skizzieren Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ sowie die Quadrik im Standardkoordinatensystem.

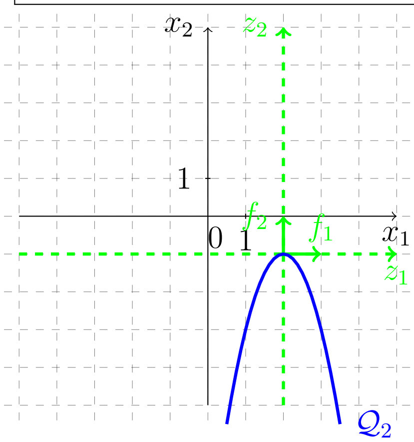
euklidische Normalform:

Zu $\mathcal{Q}_1$: $\boxed{-4z_1^2 + 2z_2 = 0}$ $\quad F = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$ $\quad t = \boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$



euklidische Normalform:

Zu $\mathcal{Q}_2$: $\boxed{4z_1^2 + 2z_2 = 0}$ $\quad F = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$ $\quad t = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}$



(b) Bestimmen Sie eine uneigentliche Isometrie $\alpha \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon v \mapsto Av + s$, die $\mathcal{Q}_1$ auf $\mathcal{Q}_2$ abbildet.

Isometrie: $\alpha \colon v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}\, v + \boxed{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}}$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3\mathrm{i} & 0 & -3\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 5\mathrm{i} \\ 0 & 2\mathrm{i} & -2 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Ergebnisse in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

(a) Bestimmen Sie den Eigenwert λ_1 zum Eigenvektor $v_1 = (6\mathrm{i}, 3 - \mathrm{i}, 2)^\mathsf{T}$.

$$\lambda_1 = \boxed{-1 + 3\mathrm{i}}$$

(b) Geben Sie die Determinante und die Spur von A an.

$$\det(A) = \boxed{30\mathrm{i}} \qquad \mathrm{Sp}\,(A) = \boxed{-2 + 3\mathrm{i}}$$

(c) Bestimmen Sie die restlichen Eigenwerte $\lambda_2,\ \lambda_3 \in \mathbb{C}$ der Matrix A.

$$\lambda_2 = \boxed{-1 - 3\mathrm{i}} \qquad \lambda_3 = \boxed{3\mathrm{i}}$$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte. Tragen Sie „divergent“ ein, falls kein Grenzwert existiert.

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} 3\cos(2\pi n) = \boxed{3} \qquad \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{4} - \frac{1}{2} = \boxed{\text{divergent}}$$

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} (-3)^k = \boxed{\text{divergent}} \qquad \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \left(-\frac{1}{4}\right)^k = \boxed{\frac{4}{5}}$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte	/1	/4	/4	/5	/8	/5	/4	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und nicht eingesammelt.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F_c = (f_1, f_2, f_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2-c \\ 0 & c-1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Es sei die lineare Abbildung φ gegeben als $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto Av$. Bestimmen Sie:

$\mathrm{Rg}(A) = \boxed{2}$ $\qquad$ $\dim(\mathrm{Kern}\,(\varphi)) = \boxed{1}$

(b) Bestimmen Sie die Determinante von F_c.

$$\det(F_c) = \boxed{c^2 - 2c + 3}$$

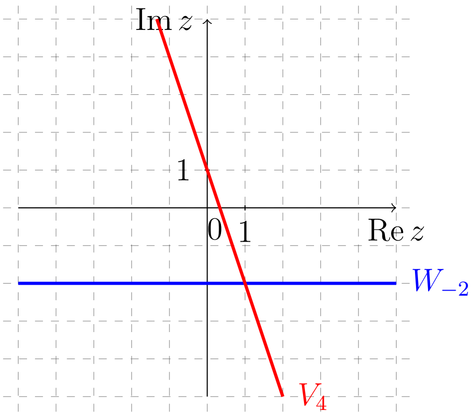
(c) Bestimmen Sie c so, dass die Spaltenvektoren von F_c jeweils paarweise orthogonal sind.

$$c = \boxed{3}$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Für $s, t \in \mathbb{R}$ seien folgende Teilmengen von $\mathbb{C}$ gegeben.

$$V_s := \left\{ 1 - 2\mathrm{i} + \lambda(1 + \mathrm{i} - s\mathrm{i}) \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \quad W_t := \left\{ -4\mathrm{i} - t\mathrm{i} + \lambda(1 - 4\mathrm{i} - 2t\mathrm{i}) \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

(a) Skizzieren Sie V_4 und W_{-2}.



(b) Für welches $t \in \mathbb{R}$ gilt $V_1 = W_t$? $t = \boxed{-2}$

(c) Für welches $s \in \mathbb{R}$ ist V_s ein reeller Untervektorraum von $\mathbb{C}$? $s = \boxed{3}$

Aufgabe 4 (*5 Punkte*) Gegeben ist der Vektorraum $\mathbb{C}^2$ über $\mathbb{C}$ mit den Basen

$$E\colon \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B\colon \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C\colon \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die folgenden Matrizen:

$${}_E\mathrm{id}_B = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -2 \end{pmatrix}} \qquad {}_C\mathrm{id}_E = \boxed{\begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 0 \\ 2\mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}} \qquad {}_C\mathrm{id}_B = \boxed{\begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 1 \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}}$$

(b) Gegeben sei die lineare Abbildung α in Koordinaten bezüglich E als

$$\alpha : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 : v \mapsto \begin{pmatrix} -2\mathrm{i} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v$$

.

Bestimmen Sie die folgenden Matrizen:

$${}_E\alpha_C = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}} \qquad {}_C\alpha_C = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & -2\mathrm{i} \end{pmatrix}}$$

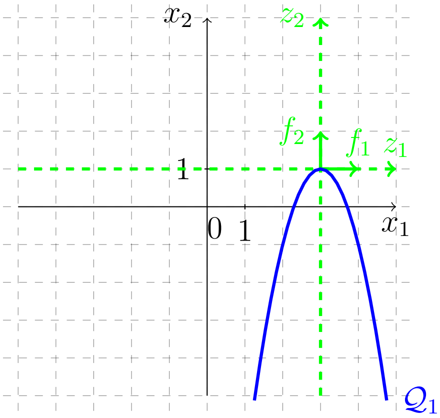
Aufgabe 5 (*8 Punkte*) Gegeben sind bezüglich des Standardkoordinatensystems $\mathbb{E}$ die Quadriken

$$\mathcal{Q}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2x_1^2 - 12x_1 + x_2 + 17 = 0 \right\} \text{ und } \mathcal{Q}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -2x_1^2 - 12x_1 + x_2 - 17 = 0 \right\}.$$

(a) Bestimmen Sie jeweils ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$, in dem die Gleichung der Quadrik euklidische Normalform hat. Geben Sie diese Normalform sowie F und t für die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}\colon v \mapsto Fv + t$ an. Skizzieren Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ sowie die Quadrik im Standardkoordinatensystem.

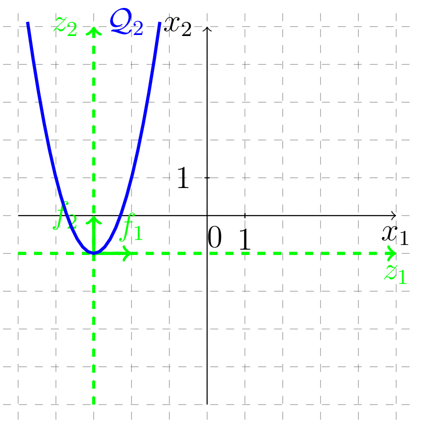
euklidische Normalform:

Zu $\mathcal{Q}_1$: $\boxed{4z_1^2 + 2z_2 = 0}$ $\quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad t = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$



euklidische Normalform:

Zu $\mathcal{Q}_2$: $\boxed{-4z_1^2 + 2z_2 = 0}$ $\quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad t = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$



(b) Bestimmen Sie eine uneigentliche Isometrie $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon v \mapsto Av + s$, die $\mathcal{Q}_1$ auf $\mathcal{Q}_2$ abbildet.

Isometrie: $\alpha\colon v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -2\mathrm{i} & 2 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 2\mathrm{i} \\ 0 & 4\mathrm{i} & 4 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Ergebnisse in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

(a) Bestimmen Sie den Eigenwert λ_1 zum Eigenvektor $v_1 = (1, 1 + \mathrm{i}, 2)^\intercal$.

$$\lambda_1 = \boxed{2 + 2\mathrm{i}}$$

(b) Geben Sie die Determinante und die Spur von A an.

$$\det(A) = \boxed{-16\mathrm{i}} \qquad \mathrm{Sp}(A) = \boxed{4 - 2\mathrm{i}}$$

(c) Bestimmen Sie die restlichen Eigenwerte $\lambda_2,\ \lambda_3 \in \mathbb{C}$ der Matrix A.

$$\lambda_2 = \boxed{2 - 2\mathrm{i}} \qquad \lambda_3 = \boxed{-2\mathrm{i}}$$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte. Tragen Sie „divergent“ ein, falls kein Grenzwert existiert.

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \boxed{\frac{3}{2}} \qquad \lim_{n\in\mathbb{N}} -2\cos(2\pi n) = \boxed{-2}$$

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{n+1}}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{\text{divergent}} \qquad \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} (-4)^k = \boxed{\text{divergent}}$$

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studien-gang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte	/1	/4	/4	/5	/8	/5	/4	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und nicht eingesammelt.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F_c = (f_1, f_2, f_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2+c & 1 \\ 0 & 1 & -c-1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Es sei die lineare Abbildung φ gegeben als $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon v \mapsto Av$. Bestimmen Sie:

$\mathrm{Rg}(A) = \boxed{1}$ $\quad \dim(\mathrm{Kern}\,(\varphi)) = \boxed{2}$

(b) Bestimmen Sie die Determinante von F_c.

$$\det(F_c) = \boxed{-c^2 - 2c - 3}$$

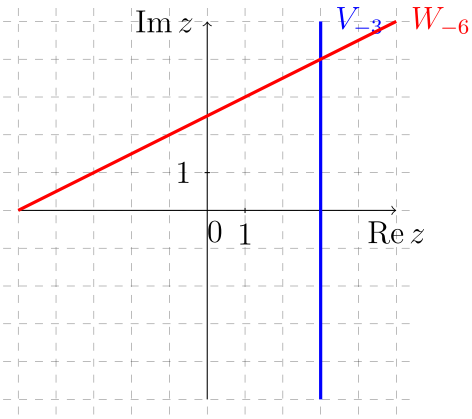
(c) Bestimmen Sie c so, dass die Spaltenvektoren von F_c jeweils paarweise orthogonal sind.

$$c = \boxed{-3}$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Für $s, t \in \mathbb{R}$ seien folgende Teilmengen von $\mathbb{C}$ gegeben.

$$V_s := \left\{2\mathrm{i} - s + \lambda(s + 3 + 3\mathrm{i}) \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R}\right\}, \quad W_t := \left\{3 + 4\mathrm{i} + \lambda(t - 2 - 4\mathrm{i}) \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

(a) Skizzieren Sie V_{-3} und W_{-6}.



(b) Für welches $s \in \mathbb{R}$ gilt $V_s = W_2$? $s = \boxed{-3}$

(c) Für welches $t \in \mathbb{R}$ ist W_t ein reeller Untervektorraum von $\mathbb{C}$? $t = \boxed{-1}$

Aufgabe 4 (*5 Punkte*) Gegeben ist der Vektorraum $\mathbb{C}^2$ über $\mathbb{C}$ mit den Basen

$$E\colon \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B\colon \begin{pmatrix}\mathrm{i}\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\\mathrm{i}\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C\colon \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathrm{i}\\-2\end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die folgenden Matrizen:

$${}_E\mathrm{id}_B = \boxed{\begin{pmatrix}\mathrm{i} & 1\\-2 & \mathrm{i}\end{pmatrix}} \qquad {}_C\mathrm{id}_E = \boxed{\begin{pmatrix}-2\mathrm{i} & 1\\-\mathrm{i} & 0\end{pmatrix}} \qquad {}_C\mathrm{id}_B = \boxed{\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\1 & -\mathrm{i}\end{pmatrix}}$$

(b) Gegeben sei die lineare Abbildung α in Koordinaten bezüglich E als

$$\alpha : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 : v \mapsto \begin{pmatrix}1 & 0\\-2\mathrm{i} & 1\end{pmatrix} v$$

.

Bestimmen Sie die folgenden Matrizen:

$${}_E\alpha_C = \boxed{\begin{pmatrix}0 & \mathrm{i}\\1 & 0\end{pmatrix}} \qquad {}_C\alpha_C = \boxed{\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}}$$

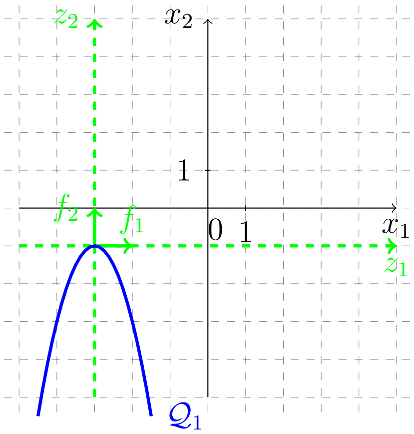
Aufgabe 5 (*8 Punkte*) Gegeben sind bezüglich des Standardkoordinatensystems $\mathbb{E}$ die Quadriken

$$\mathcal{Q}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2x_1^2 + 12x_1 + x_2 + 19 = 0 \right\} \text{ und } \mathcal{Q}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2x_1^2 - 12x_1 + x_2 + 17 = 0 \right\}.$$

(a) Bestimmen Sie jeweils ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$, in dem die Gleichung der Quadrik euklidische Normalform hat. Geben Sie diese Normalform sowie F und t für die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon v \mapsto Fv + t$ an. Skizzieren Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ sowie die Quadrik im Standardkoordinatensystem.

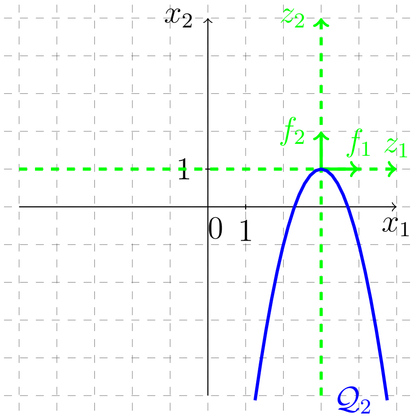
euklidische Normalform:

Zu $\mathcal{Q}_1$: $\boxed{4z_1^2 + 2z_2 = 0}$ $\quad F = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$ $\quad t = \boxed{\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}}$



euklidische Normalform:

Zu $\mathcal{Q}_2$: $\boxed{4z_1^2 + 2z_2 = 0}$ $\quad F = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$ $\quad t = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}$



(b) Bestimmen Sie eine uneigentliche Isometrie $\alpha \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon v \mapsto Av + s$, die $\mathcal{Q}_1$ auf $\mathcal{Q}_2$ abbildet.

Isometrie: $\alpha \colon v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \, v + \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}}$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -3\mathrm{i} & 0 & 3\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 5\mathrm{i} \\ 0 & 2\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Ergebnisse in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

(a) Bestimmen Sie den Eigenwert λ_1 zum Eigenvektor $v_1 = (6\mathrm{i}, -3 + \mathrm{i}, 2)^\mathsf{T}$.

$$\lambda_1 = \boxed{1 - 3\mathrm{i}}$$

(b) Geben Sie die Determinante und die Spur von A an.

$$\det(A) = \boxed{-30\mathrm{i}} \qquad \mathrm{Sp}\,(A) = \boxed{2 - 3\mathrm{i}}$$

(c) Bestimmen Sie die restlichen Eigenwerte $\lambda_2,\ \lambda_3 \in \mathbb{C}$ der Matrix A.

$$\lambda_2 = \boxed{1 + 3\mathrm{i}} \qquad \lambda_3 = \boxed{-3\mathrm{i}}$$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte. Tragen Sie „divergent“ ein, falls kein Grenzwert existiert.

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} (-5)^k = \boxed{\text{divergent}} \qquad \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \boxed{\frac{4}{3}}$$

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} -3\cos(2\pi n) = \boxed{-3} \qquad \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{n+1}}{4} - \frac{1}{2} = \boxed{\text{divergent}}$$