Aufgabe 7 (6 Punkte)

Gegeben sei $\mathbb{R}^3$ mit Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = (0; e_1, e_2, e_3)$. Sei

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad {}_{\mathbb{E}}Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad {}_{\mathbb{F}}R = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und berechnen Sie ${}_{\mathbb{E}}R$:

${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \quad v \mapsto \qquad \cdot v + \qquad\qquad {}_{\mathbb{E}}R =$

(b) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ und berechnen Sie ${}_{\mathbb{F}}Q$:

${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \quad v \mapsto \qquad \cdot v + \qquad\qquad {}_{\mathbb{F}}Q =$

Aufgabe 8 (2 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ eine 3×3-Matrix mit den Eigenwerten λ_1, λ_2 und $\lambda_3 \in \mathbb{C}$. Weiterhin gelte

$$\det(A) = 3, \quad \mathrm{Sp}(A) = 3, \quad \lambda_1 = 1.$$

Bestimmen Sie λ_2 und λ_3:

$\lambda_2 = \qquad\qquad \lambda_3 =$

Scheinklausur 2 **Höhere Mathematik 1** **04. 02. 2017**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt)

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9

Gruppe:

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Aufgabe 2 (5 Punkte) 0 1 2 3 4 5

Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $B : b_1, b_2, b_3$ von $\mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$ so, dass gilt $\mathrm{L}(b_1) = \mathrm{L}(v_1)$ und $\mathrm{L}(b_1, b_2) = \mathrm{L}(v_1, v_2)$.

$b_1 =$ ☐ $b_2 =$ ☐ $b_3 =$ ☐

Aufgabe 3 (2 Punkte) 0 1 2

Bestimmen Sie die Spur und die Determinante der Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

$\mathrm{Sp}(A) =$ ☐, $\det(A) =$ ☐.

Aufgabe 4 (6 Punkte) 0 1 2 3 4 5 6

Es sei $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) Geben Sie alle Eigenwerte von A und zu jedem Eigenwert λ dessen algebraische Vielfachheit e_λ an.

☐

(b) Geben Sie die Eigenräume von A zu jedem Eigenwert an.

☐

Aufgabe 5 (7 Punkte) 0 1 2 3 4 5 6 7

Wir betrachten die Quadrik $Q := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1^2 - 4\sqrt{3}x_1x_2 - x_2^2 + \sqrt{3}x_1 - x_2 + \frac{11}{5} = 0\}$.

(a) Geben Sie eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, einen Vektor $a \in \mathbb{R}^2$ und ein $c \in \mathbb{R}$ so an, dass gilt $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\mathsf{T} Ax + 2a^\mathsf{T} x + c = 0\}$.

$A =$ ☐, $a =$ ☐, $c =$ ☐.

(b) Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D und eine orthogonale Matrix F so, dass $D = F^\mathsf{T} AF$. Geben Sie D und F an.

$D =$ ☐ $F =$ ☐

(c) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q.

☐

Aufgabe 6 (2 Punkte) 0 1 2

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Sei

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & \alpha & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Rang von A_8:

$\mathrm{Rg}\, A_8 =$ ☐

(b) Für welche Werte des Parameters α ist $\mathrm{Rg}\, A_\alpha = 1$?

$\alpha =$ ☐

Aufgabe 7 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

Gegeben sei $\mathbb{R}^3$ mit Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = (0; e_1, e_2, e_3)$. Sei

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad {}_{\mathbb{E}}Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad {}_{\mathbb{F}}R = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und berechnen Sie ${}_{\mathbb{E}}R$:

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon \quad v \mapsto \boxed{} \cdot v + \boxed{} \qquad {}_{\mathbb{E}}R = \boxed{}$$

(b) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ und berechnen Sie ${}_{\mathbb{F}}Q$:

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon \quad v \mapsto \boxed{} \cdot v + \boxed{} \qquad {}_{\mathbb{F}}Q = \boxed{}$$

Aufgabe 8 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2

Sei $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ eine 3×3-Matrix mit den Eigenwerten λ_1, λ_2 und $\lambda_3 \in \mathbb{C}$. Weiterhin gelte

$$\det(A) = 4, \quad \operatorname{Sp}(A) = 3, \quad \lambda_1 = 1.$$

Bestimmen Sie λ_2 und λ_3:

$$\lambda_2 = \boxed{} \qquad \lambda_3 = \boxed{}$$

Scheinklausur 2 | **Höhere Mathematik 1** | **04. 02. 2017**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ☐1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $B : b_1, b_2, b_3$ von $\mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$ so, dass gilt $\mathrm{L}(b_1) = \mathrm{L}(v_1)$ und $\mathrm{L}(b_1, b_2) = \mathrm{L}(v_1, v_2)$.

$b_1 =$ ☐ $\quad b_2 =$ ☐ $\quad b_3 =$ ☐

Aufgabe 3 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2

Bestimmen Sie die Spur und die Determinante der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

$\mathrm{Sp}(A) =$ ☐, $\quad \det(A) =$ ☐.

Aufgabe 4 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Geben Sie alle Eigenwerte von A und zu jedem Eigenwert λ dessen algebraische Vielfachheit e_λ an.

☐

(b) Geben Sie die Eigenräume von A zu jedem Eigenwert an.

☐

Aufgabe 5 (7 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7

Wir betrachten die Quadrik $Q := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -x_1^2 - 2\sqrt{3}x_1x_2 + x_2^2 + x_1 - \sqrt{3}x_2 + \frac{7}{2} = 0\}$.

(a) Geben Sie eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, einen Vektor $a \in \mathbb{R}^2$ und ein $c \in \mathbb{R}$ so an, dass gilt $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0\}$.

$A =$ ☐, $\quad a =$ ☐, $\quad c =$ ☐.

(b) Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D und eine orthogonale Matrix F so, dass $D = F^\intercal AF$. Geben Sie D und F an.

$D =$ ☐ $\quad F =$ ☐

(c) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q.

☐

Aufgabe 6 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Sei

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche Werte des Parameters α ist $\mathrm{Rg}\, A_\alpha = 1$?

$\alpha =$ ☐

(b) Bestimmen Sie den Rang von A_3:

$\mathrm{Rg}\, A_3 =$ ☐

Aufgabe 7 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

Gegeben sei $\mathbb{R}^3$ mit Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = (0; e_1, e_2, e_3)$. Sei

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad {}_{\mathbb{E}}Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad {}_{\mathbb{F}}R = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und berechnen Sie ${}_{\mathbb{E}}R$:

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3: \quad v \mapsto \boxed{} \cdot v + \boxed{} \qquad {}_{\mathbb{E}}R = \boxed{}$$

(b) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ und berechnen Sie ${}_{\mathbb{F}}Q$:

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3: \quad v \mapsto \boxed{} \cdot v + \boxed{} \qquad {}_{\mathbb{F}}Q = \boxed{}$$

Aufgabe 8 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2

Sei $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ eine 3×3-Matrix mit den Eigenwerten λ_1, λ_2 und $\lambda_3 \in \mathbb{C}$. Weiterhin gelte

$$\det(A) = 6, \quad \operatorname{Sp}(A) = 3, \quad \lambda_1 = 1.$$

Bestimmen Sie λ_2 und λ_3:

$$\lambda_2 = \boxed{} \qquad \lambda_3 = \boxed{}$$

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ☐1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (5 Punkte) 0 1 2 3 4 5

Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $B : b_1, b_2, b_3$ von $\mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$ so, dass gilt $\mathrm{L}(b_1) = \mathrm{L}(v_1)$ und $\mathrm{L}(b_1, b_2) = \mathrm{L}(v_1, v_2)$.

$b_1 =$ ☐ $b_2 =$ ☐ $b_3 =$ ☐

Aufgabe 3 (2 Punkte) 0 1 2

Bestimmen Sie die Spur und die Determinante der Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

$\mathrm{Sp}(A) =$ ☐, $\det(A) =$ ☐.

Aufgabe 4 (6 Punkte) 0 1 2 3 4 5 6

Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Geben Sie alle Eigenwerte von A und zu jedem Eigenwert λ dessen algebraische Vielfachheit e_λ an.

(b) Geben Sie die Eigenräume von A zu jedem Eigenwert an.

Aufgabe 5 (7 Punkte) 0 1 2 3 4 5 6 7

Wir betrachten die Quadrik $Q := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1^2 - 2\sqrt{3}x_1x_2 - \sqrt{3}x_1 + x_2 + \frac{7}{3} = 0\}$.

(a) Geben Sie eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, einen Vektor $a \in \mathbb{R}^2$ und ein $c \in \mathbb{R}$ so an, dass gilt $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\mathsf{T} Ax + 2a^\mathsf{T} x + c = 0\}$.

$A =$ ☐, $a =$ ☐, $c =$ ☐.

(b) Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D und eine orthogonale Matrix F so, dass $D = F^\mathsf{T} AF$. Geben Sie D und F an.

$D =$ ☐ $F =$ ☐

(c) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q.

Aufgabe 6 (2 Punkte) 0 1 2

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Sei

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ \alpha & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Rang von A_1:

$\mathrm{Rg}\, A_1 =$ ☐

(b) Für welche Werte des Parameters α ist $\mathrm{Rg}\, A_\alpha = 1$?

$\alpha =$ ☐

Aufgabe 7 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

Gegeben sei $\mathbb{R}^3$ mit Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = (0; e_1, e_2, e_3)$. Sei

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad {}_{\mathbb{E}}Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad {}_{\mathbb{F}}R = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und berechnen Sie ${}_{\mathbb{E}}R$:

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3: \quad v \mapsto \boxed{} \cdot v + \boxed{} \qquad {}_{\mathbb{E}}R = \boxed{}$$

(b) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ und berechnen Sie ${}_{\mathbb{F}}Q$:

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3: \quad v \mapsto \boxed{} \cdot v + \boxed{} \qquad {}_{\mathbb{F}}Q = \boxed{}$$

Aufgabe 8 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2

Sei $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ eine 3×3-Matrix mit den Eigenwerten λ_1, λ_2 und $\lambda_3 \in \mathbb{C}$. Weiterhin gelte

$$\det(A) = 8, \quad \mathrm{Sp}(A) = 3, \quad \lambda_1 = 1.$$

Bestimmen Sie λ_2 und λ_3:

$$\lambda_2 = \boxed{} \qquad \lambda_3 = \boxed{}$$

Scheinklausur 2 | **Höhere Mathematik 1** | **04. 02. 2017**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ☐1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $B : b_1, b_2, b_3$ von $\mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$ so, dass gilt $\mathrm{L}(b_1) = \mathrm{L}(v_1)$ und $\mathrm{L}(b_1, b_2) = \mathrm{L}(v_1, v_2)$.

$b_1 =$ ☐ $\quad b_2 =$ ☐ $\quad b_3 =$ ☐

Aufgabe 3 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2

Bestimmen Sie die Spur und die Determinante der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

$\mathrm{Sp}(A) =$ ☐, $\quad \det(A) =$ ☐.

Aufgabe 4 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

Es sei $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

(a) Geben Sie alle Eigenwerte von A und zu jedem Eigenwert λ dessen algebraische Vielfachheit e_λ an.

☐

(b) Geben Sie die Eigenräume von A zu jedem Eigenwert an.

☐

Aufgabe 5 (7 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7

Wir betrachten die Quadrik $Q := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -4\sqrt{3}x_1x_2 + 4x_2^2 + \sqrt{3}x_1 + x_2 + \frac{5}{2} = 0\}$.

(a) Geben Sie eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, einen Vektor $a \in \mathbb{R}^2$ und ein $c \in \mathbb{R}$ so an, dass gilt $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0\}$.

$A =$ ☐, $\quad a =$ ☐, $\quad c =$ ☐.

(b) Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D und eine orthogonale Matrix F so, dass $D = F^\intercal AF$. Geben Sie D und F an.

$D =$ ☐ $\quad F =$ ☐

(c) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q.

☐

Aufgabe 6 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Sei

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & \alpha \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche Werte des Parameters α ist $\mathrm{Rg}\, A_\alpha = 1$?

$\alpha =$ ☐

(b) Bestimmen Sie den Rang von A_5:

$\mathrm{Rg}\, A_5 =$ ☐