Aufgabe 6 (6 Punkte)

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

Gegeben sei $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = (0; \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3)$. Weiter seien

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \mathbb{G} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Bestimmen Sie die folgenden Koordinatentransformationen.

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \quad v \mapsto \boxed{} \cdot v + \boxed{}$$

$${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \quad v \mapsto \boxed{} \cdot v + \boxed{}$$

$${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \quad v \mapsto \boxed{} \cdot v + \boxed{}$$

Aufgabe 7 (3 Punkte)

☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine reelle 3×3-Matrix, die als Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = -3 + \sqrt{7}\,\mathrm{i}$ besitzt. Bestimmen Sie den verbliebenen Eigenwert λ_3, die Determinante von A und die Spur von A.

$$\lambda_3 = \boxed{}, \quad \det A = \boxed{}, \quad \operatorname{Sp} A = \boxed{}.$$

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

☐1 ☐2 ☐3 ☐4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt)

☐0 ☐1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (6 Punkte) □0 □1 □2 □3 □4 □5 □6

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Geben Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ von A an.

$\chi_A(\lambda) =$ □

(b) Geben Sie alle Eigenwerte von A an.

□

(c) Bestimmen Sie Eigenvektoren v_1, v_2, v_3 von A so, dass diese eine Orthonormalbasis für $\mathbb{R}^3$ bilden.

$v_1 =$ □ , $v_2 =$ □ , $v_3 =$ □ .

Aufgabe 3 (3 Punkte) □0 □1 □2 □3

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter und $A_\alpha = \begin{pmatrix} 3 & \alpha \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Für welche Werte des Parameters α ist $\operatorname{Rg} A_\alpha = 1$?

□

(b) Für welche Werte des Parameters α ist A_α invertierbar?

□

(c) Für welche Werte des Parameters α ist A_α nicht diagonalisierbar?

□

Aufgabe 4 (7 Punkte) □0 □1 □2 □3 □4 □5 □6 □7

Wir betrachten die Quadrik $Q := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -2x_1^2 + 8x_1x_2 - 8x_2^2 + 8\sqrt{5}x_1 + 2\sqrt{5}x_2 - 2 = 0\}$.

(a) Geben Sie eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, einen Vektor $a \in \mathbb{R}^2$ und ein $c \in \mathbb{R}$ so an, dass gilt $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0\}$.

$A =$ □ , $a =$ □ , $c =$ □ .

(b) Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D und eine orthogonale Matrix F so, dass $D = F^\intercal AF$. Geben Sie D und F an.

$D =$ □ , $F =$ □ .

(c) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q.

□

Aufgabe 5 (5 Punkte) □0 □1 □2 □3 □4 □5

(a) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \left((-1)^n + 5\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right)$.

□

(b) Sei $\beta \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Für welche Werte von β ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \left(\frac{5}{7} + \beta\right)^n$ konvergent?

□

(c) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} =$ □ .