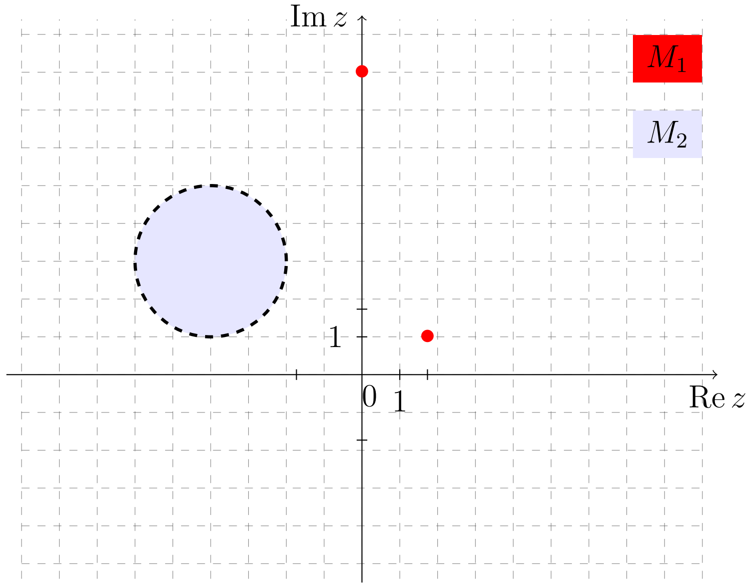
Aufgabe 7 (3 Punkte) 0 1 2 3

Skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 := \left\{\sqrt{3}+\mathrm{i}, (\sqrt{3}+\mathrm{i})^3\right\}, \quad M_2 := \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z+4-3\mathrm{i}| < 2\right\}$$

in der komplexen Zahlenebene, in der die Punkte $\pm\sqrt{3}$ und $\pm\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ bereits eingezeichnet sind.



Der Rand von M_2 gehört nicht dazu.

Aufgabe 8 (6 Punkte) 0 1 2 3 4 5 6

Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 2\mathrm{i} & 0 & 0 \\ -3\mathrm{i} & -4\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Ergebnisse in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

(a) Geben Sie die Determinante und die Spur von A an.

$\det(A) = \boxed{4}$ $\qquad \mathrm{Sp}(A) = \boxed{1-3\mathrm{i}}$

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte λ_j und je einen zugehörigen Eigenvektor v_j für $j \in \{1,2,3,4\}$.

$\lambda_1 = \boxed{-2\mathrm{i}}$ $\quad \lambda_2 = \boxed{-\mathrm{i}}$ $\quad \lambda_3 = \boxed{-1}$ $\quad \lambda_4 = \boxed{2}$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** 1 2 3 4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) 0 1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9

Gruppe:

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Aufgabe 2 (7 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ■7

Es sei $\mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad höchstens 2 mit den Basen

$$\mathcal{B}\colon 1, X, X^2 \quad \text{und} \quad \mathcal{C}\colon 1, -X, 2+X^2.$$

Weiterhin soll die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R} \to \mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}$ die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\varphi(-1) = -2X, \quad \varphi(X-1) = -2-7X, \quad \varphi\left(-2X^2+3X\right) = -8-7X-6X^2.$$

(a) Bestimmen Sie:

$$\varphi(1) = \boxed{2X}\,, \qquad \varphi(X) = \boxed{-2-5X}\,,$$

$$\varphi\left(X^2\right) = \boxed{1-4X+3X^2}\,, \qquad \varphi\left(2+X^2\right) = \boxed{1+3X^2}\,.$$

(b) Bestimmen Sie ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}}$, ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$ und ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$:

$${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}, \quad {}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ -2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}, \quad {}_{\mathcal{B}}\mathrm{id}_{\mathcal{C}} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Aufgabe 3 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Gegeben seien das Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

und die Gerade g durch die Gleichung $x_2 = 3x_1$. Bestimmen Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}\colon {}_{\mathbb{F}}v \mapsto F\,{}_{\mathbb{F}}v + P$, ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\colon {}_{\mathbb{E}}v \mapsto G\,{}_{\mathbb{E}}v + Q$ und die Abbildung ${}_{\mathbb{F}}\beta_{\mathbb{F}}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon {}_{\mathbb{F}}v \mapsto B\,{}_{\mathbb{F}}v + t$, wobei β die Spiegelung an der Geraden g bezeichnet, und geben Sie die folgenden Matrizen an.

$$F = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}, \quad G = \boxed{\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}, \quad B = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte. Tragen Sie „divergent" ein, falls kein Grenzwert existiert.

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{(-3)^k}{2^k} = \boxed{\text{divergent}} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{2n} + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} 2\left(-\frac{1}{3}\right)^k = \boxed{\frac{3}{2}} \qquad \lim_{n\to\infty} 5^{-n} n! = \boxed{\text{divergent}}$$

Aufgabe 5 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Gegeben ist das Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}\right).$$

Bestimmen Sie die Koordinatentransformation von Standard- auf $\mathbb{F}$-Koordinaten und umgekehrt.

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}\left({}_{\mathbb{F}}v\right) = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}\,{}_{\mathbb{F}}v + \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}}, \quad {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\left({}_{\mathbb{E}}v\right) = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}\,{}_{\mathbb{E}}v + \boxed{\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 6 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

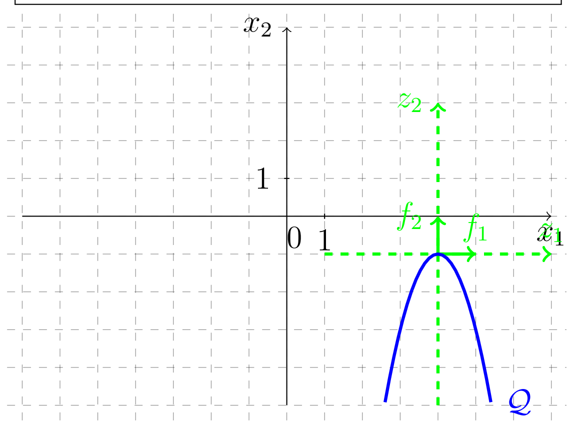
Gegeben ist bezüglich des Standardkoordinatensystems $\mathbb{E}$ die Quadrik

$$\mathcal{Q} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2x_1^2 - 16x_1 + x_2 + 33 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$, in dem die Gleichung der Quadrik euklidische Normalform hat. Geben Sie diese Normalform sowie F und t für die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}\colon {}_{\mathbb{F}}v \mapsto F\,{}_{\mathbb{F}}v + t$ an. Skizzieren Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ sowie die Quadrik im Standardkoordinatensystem.

euklidische Normalform:

$$\mathcal{Q}\colon \boxed{4z_1^2 + 2z_2 = 0} \qquad F = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \qquad t = \boxed{\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}}$$



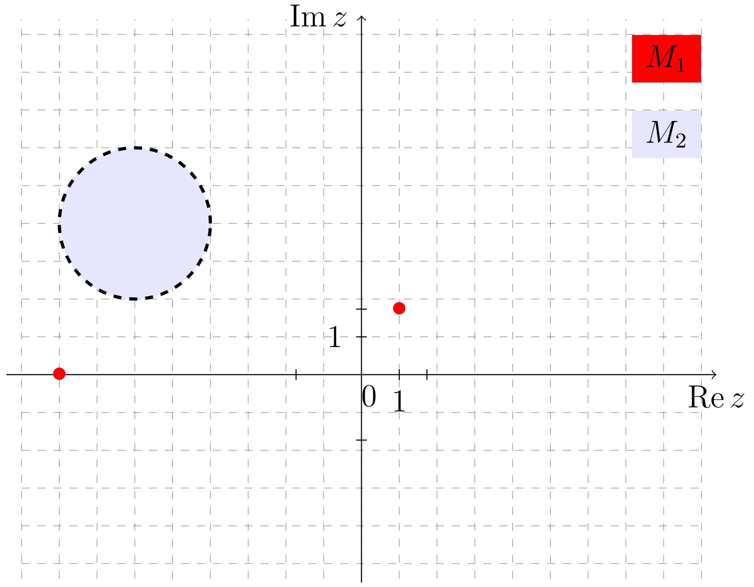
Aufgabe 7 (3 Punkte)

0 1 2 3

Skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 := \left\{1+\sqrt{3}\,\mathrm{i},\, (1+\sqrt{3}\,\mathrm{i})^3\right\}, \quad M_2 := \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z+6-4\mathrm{i}| < 2\right\}$$

in der komplexen Zahlenebene, in der die Punkte $\pm\sqrt{3}$ und $\pm\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ bereits eingezeichnet sind.



Der Rand von M_2 gehört nicht dazu.

Aufgabe 8 (6 Punkte)

0 1 2 3 4 5 6

Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -5\mathrm{i} & -3\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 6\mathrm{i} & 4\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Ergebnisse in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

(a) Geben Sie die Spur und die Determinante von A an.

$\mathrm{Sp}\,(A) = \boxed{-3-\mathrm{i}}$ $\qquad \det\,(A) = \boxed{4}$

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte λ_j und je einen zugehörigen Eigenvektor v_j für $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

$\lambda_1 = \boxed{-2\mathrm{i}}$ $\quad \lambda_2 = \boxed{\mathrm{i}}$ $\quad \lambda_3 = \boxed{-2}$ $\quad \lambda_4 = \boxed{-1}$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1 2 3 4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt)

0 1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9

Gruppe:

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Aufgabe 2 (7 Punkte) 0 1 2 3 4 5 6 7

Es sei $\mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad höchstens 2 mit den Basen

$$\mathcal{B}\colon 1, X, X^2 \quad \text{und} \quad \mathcal{C}\colon -1, X, 2+X^2.$$

Weiterhin soll die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R} \to \mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}$ die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\varphi(-1) = 2X, \quad \varphi(X-1) = 5 - 2X + 2X^2, \quad \varphi\left(-2X^2+3X\right) = 11 - 22X + 6X^2.$$

(a) Bestimmen Sie:

$$\varphi(1) = \boxed{-2X}, \qquad \varphi(X) = \boxed{5-4X+2X^2},$$

$$\varphi\left(X^2\right) = \boxed{2+5X}, \qquad \varphi\left(2+X^2\right) = \boxed{2+X}.$$

(b) Bestimmen Sie ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}}$, ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$ und ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$:

$${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ -2 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}}, \quad {}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}}, \quad {}_{\mathcal{B}}\mathrm{id}_{\mathcal{C}} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Aufgabe 3 (3 Punkte) 0 1 2 3

Gegeben seien das Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\right)$$

und die Gerade g durch die Gleichung $x_2 = 4x_1$. Bestimmen Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}\colon {}_{\mathbb{F}}v \mapsto F\,{}_{\mathbb{F}}v + P$, ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\colon {}_{\mathbb{E}}v \mapsto G\,{}_{\mathbb{E}}v + Q$ und die Abbildung ${}_{\mathbb{F}}\beta_{\mathbb{F}}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon {}_{\mathbb{F}}v \mapsto B\,{}_{\mathbb{F}}v + t$, wobei β die Spiegelung an der Geraden g bezeichnet, und geben Sie die folgenden Matrizen an.

$$F = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}}, \quad G = \boxed{\frac{1}{17}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}, \quad B = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte) 0 1 2 3 4

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte. Tragen Sie „divergent" ein, falls kein Grenzwert existiert.

$$\lim_{n\to\infty} 2^{-n} n! = \boxed{\text{divergent}} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{4n} - \frac{1}{3} = \boxed{-\frac{1}{3}}$$

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{(-4)^k}{3^k} = \boxed{\text{divergent}} \qquad \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} 3\left(-\frac{1}{4}\right)^k = \boxed{\frac{12}{5}}$$

Aufgabe 5 (3 Punkte) 0 1 2 3

Gegeben ist das Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right).$$

Bestimmen Sie die Koordinatentransformation von Standard- auf $\mathbb{F}$-Koordinaten und umgekehrt.

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}\left({}_{\mathbb{F}}v\right) = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}}\,{}_{\mathbb{F}}v + \boxed{\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}}, \quad {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\left({}_{\mathbb{E}}v\right) = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}}\,{}_{\mathbb{E}}v + \boxed{\begin{pmatrix}-7\\17\end{pmatrix}}$$

Aufgabe 6 (4 Punkte) 0 1 2 3 4

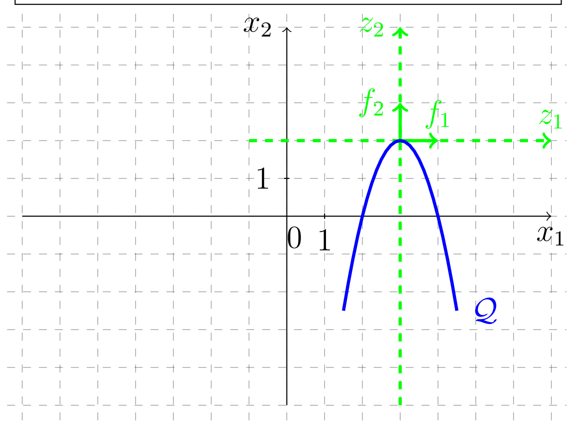
Gegeben ist bezüglich des Standardkoordinatensystems $\mathbb{E}$ die Quadrik

$$\mathcal{Q} = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2x_1^2 - 12x_1 + x_2 + 16 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$, in dem die Gleichung der Quadrik euklidische Normalform hat. Geben Sie diese Normalform sowie F und t für die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}\colon {}_{\mathbb{F}}v \mapsto F\,{}_{\mathbb{F}}v + t$ an. Skizzieren Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ sowie die Quadrik im Standardkoordinatensystem.

euklidische Normalform:

$$\mathcal{Q}\colon \boxed{4z_1^2 + 2z_2 = 0} \qquad F = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \qquad t = \boxed{\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}}$$

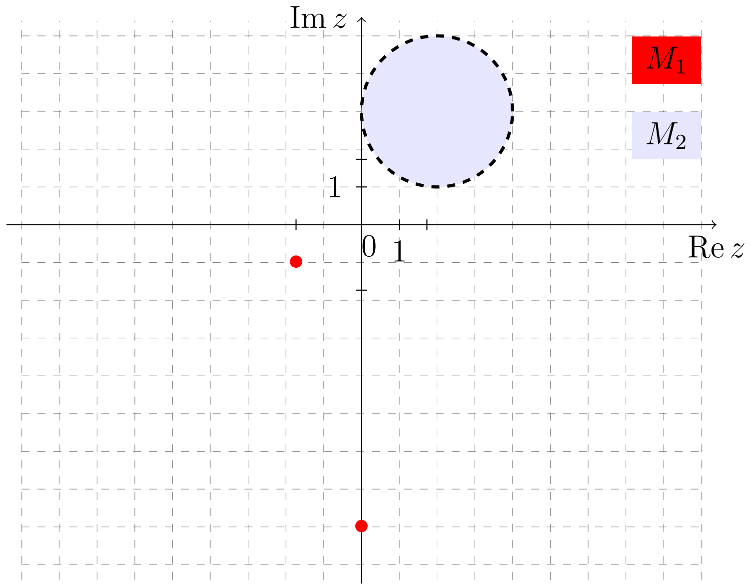


Aufgabe 7 (3 Punkte) □0 □1 □2 ■3

Skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 := \left\{-\sqrt{3}-\mathrm{i}, (-\sqrt{3}-\mathrm{i})^3\right\}, \quad M_2 := \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z-2-3\mathrm{i}| < 2\right\}$$

in der komplexen Zahlenebene, in der die Punkte $\pm\sqrt{3}$ und $\pm\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ bereits eingezeichnet sind.



Der Rand von M_2 gehört nicht dazu.

Aufgabe 8 (6 Punkte) □0 □1 □2 □3 □4 □5 ■6

Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4\mathrm{i} & 2\mathrm{i} & 0 & 0 \\ -3\mathrm{i} & -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Ergebnisse in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

(a) Geben Sie die Determinante und die Spur von A an.

$\det(A) = \boxed{4}$ $\quad \mathrm{Sp}(A) = \boxed{-1+3\mathrm{i}}$

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte λ_j und je einen zugehörigen Eigenvektor v_j für $j \in \{1,2,3,4\}$.

$\lambda_1 = \boxed{\mathrm{i}}$ $\quad \lambda_2 = \boxed{2\mathrm{i}}$ $\quad \lambda_3 = \boxed{-2}$ $\quad \lambda_4 = \boxed{1}$

$v_1 = \boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$ $\quad v_2 = \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$ $\quad v_3 = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ $\quad v_4 = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}$

+3000/1/56+

Scheinklausur **Höhere Mathematik 1** **18. 7. 2017**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** □1 □2 ■3 □4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) □0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Matrikelnummer:

□0	□0	□0	□0	□0	□0	□0
□1	□1	□1	□1	□1	□1	□1
□2	□2	□2	□2	□2	□2	□2
□3	□3	□3	□3	□3	□3	□3
□4	□4	□4	□4	□4	□4	□4
□5	□5	□5	□5	□5	□5	□5
□6	□6	□6	□6	□6	□6	□6
□7	□7	□7	□7	□7	□7	□7
□8	□8	□8	□8	□8	□8	□8
□9	□9	□9	□9	□9	□9	□9

Gruppe:

□0	□0
□1	□1
□2	□2
□3	□3
□4	□4
□5	□5
□6	□6
□7	□7
□8	□8
□9	□9

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Aufgabe 2 (7 Punkte) 0 1 2 3 4 5 6 7

Es sei $\mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad höchstens 2 mit den Basen

$$\mathcal{B}\colon 1, X, X^2 \quad \text{und} \quad \mathcal{C}\colon 1, -X, -1+X^2.$$

Weiterhin soll die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R} \to \mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}$ die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\varphi(-1) = -3+4X-2X^2, \quad \varphi(X-1) = -3+6X-2X^2, \quad \varphi\left(-2X^2+3X\right) = 12X-4X^2.$$

(a) Bestimmen Sie:

$\varphi(1) = \boxed{3-4X+2X^2}$, $\varphi(X) = \boxed{2X}$,

$\varphi\left(X^2\right) = \boxed{-3X+2X^2}$, $\varphi\left(-1+X^2\right) = \boxed{-3+X}$.

(b) Bestimmen Sie ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}}$, ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$ und ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$:

$${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}}, \quad {}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}} = \boxed{\begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \quad {}_{\mathcal{B}}\mathrm{id}_{\mathcal{C}} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Aufgabe 3 (3 Punkte) 0 1 2 3

Gegeben seien das Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

und die Gerade g durch die Gleichung $x_2 = -4x_1$. Bestimmen Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}\colon {}_{\mathbb{F}}v \mapsto F\,{}_{\mathbb{F}}v + P$, ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\colon {}_{\mathbb{E}}v \mapsto G\,{}_{\mathbb{E}}v + Q$ und die Abbildung ${}_{\mathbb{F}}\beta_{\mathbb{F}}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon {}_{\mathbb{F}}v \mapsto B\,{}_{\mathbb{F}}v + t$, wobei β die Spiegelung an der Geraden g bezeichnet, und geben Sie die folgenden Matrizen an.

$$F = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}}, \quad G = \boxed{\frac{1}{17}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}}, \quad B = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte) 0 1 2 3 4

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte. Tragen Sie „divergent" ein, falls kein Grenzwert existiert.

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} 2\left(\frac{1}{3}\right)^k = \boxed{3} \qquad \lim_{n\to\infty} 3^{-n} n! = \boxed{\text{divergent}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{4}} \qquad \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{(-6)^k}{5^k} = \boxed{\text{divergent}}$$

Aufgabe 5 (3 Punkte) 0 1 2 3

Gegeben ist das Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

Bestimmen Sie die Koordinatentransformation von Standard- auf $\mathbb{F}$-Koordinaten und umgekehrt.

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}\left({}_{\mathbb{F}}v\right) = \boxed{\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}\,{}_{\mathbb{F}}v + \boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}}, \quad {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\left({}_{\mathbb{E}}v\right) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}}\,{}_{\mathbb{E}}v + \boxed{\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 6 (4 Punkte) 0 1 2 3 4

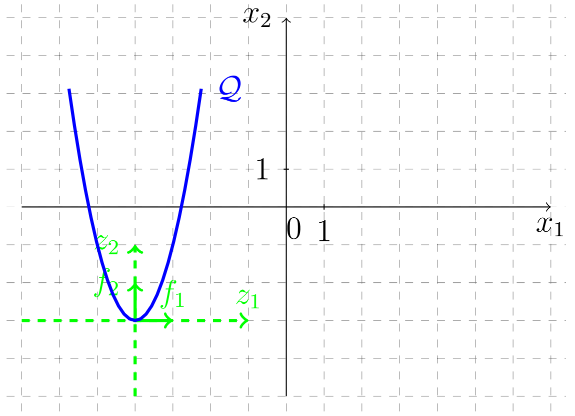
Gegeben ist bezüglich des Standardkoordinatensystems $\mathbb{E}$ die Quadrik

$$\mathcal{Q} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -2x_1^2 - 16x_1 + x_2 - 29 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$, in dem die Gleichung der Quadrik euklidische Normalform hat. Geben Sie diese Normalform sowie F und t für die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}\colon {}_{\mathbb{F}}v \mapsto F\,{}_{\mathbb{F}}v + t$ an. Skizzieren Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ sowie die Quadrik im Standardkoordinatensystem.

euklidische Normalform:

$$\mathcal{Q}\colon \boxed{-4z_1^2 + 2z_2 = 0} \qquad F = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \qquad t = \boxed{\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}}$$

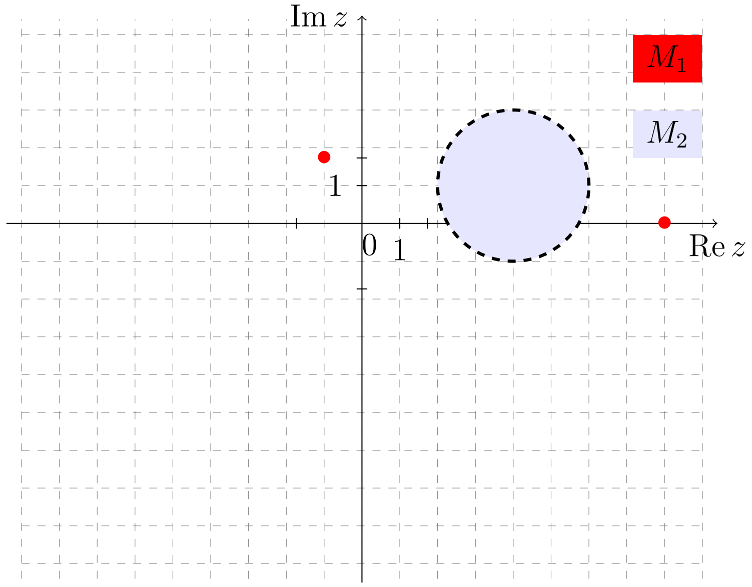


Aufgabe 7 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 := \left\{-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i},\, (-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i})^3\right\}, \quad M_2 := \left\{ z\in\mathbb{C} \;\middle|\; |z-4-\mathrm{i}| < 2\right\}$$

in der komplexen Zahlenebene, in der die Punkte $\pm\sqrt{3}$ und $\pm\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ bereits eingezeichnet sind.



Der Rand von M_2 gehört nicht dazu.

Aufgabe 8 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -4\mathrm{i} & -3\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 6\mathrm{i} & 5\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Ergebnisse in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

(a) Geben Sie die Spur und die Determinante von A an.

$\operatorname{Sp}(A) = \boxed{3+\mathrm{i}}$ $\qquad \det(A) = \boxed{4}$

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte λ_j und je einen zugehörigen Eigenvektor v_j für $j \in \{1,2,3,4\}$.

$\lambda_1 = \boxed{-\mathrm{i}}$ $\qquad \lambda_2 = \boxed{2\mathrm{i}}$ $\qquad \lambda_3 = \boxed{1}$ $\qquad \lambda_4 = \boxed{2}$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ☐1 ☐2 ☐3 ■4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Aufgabe 2 (7 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ■7

Es sei $\mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad höchstens 2 mit den Basen

$$\mathcal{B}\colon 1, X, X^2 \quad \text{und} \quad \mathcal{C}\colon -1, X, 1-X^2.$$

Weiterhin soll die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R} \to \mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}$ die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\varphi(-1) = 5X - 3X^2, \quad \varphi(X-1) = 8X - 3X^2, \quad \varphi\left(-2X^2+3X\right) = 2 + 17X - 6X^2.$$

(a) Bestimmen Sie:

$$\varphi(1) = \boxed{-5X+3X^2}\,, \qquad \varphi(X) = \boxed{3X}\,,$$

$$\varphi\left(X^2\right) = \boxed{-1-4X+3X^2}\,, \qquad \varphi\left(1-X^2\right) = \boxed{1-X}\,.$$

(b) Bestimmen Sie ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}}$, ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$ und ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$:

$${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -5 & 3 & -4 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}}, \quad {}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \quad {}_{\mathcal{B}}\mathrm{id}_{\mathcal{C}} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}.$$

Aufgabe 3 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Gegeben seien das Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}\right)$$

und die Gerade g durch die Gleichung $x_2 = -3x_1$. Bestimmen Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}\colon {}_{\mathbb{F}}v \mapsto F\,{}_{\mathbb{F}}v + P$, ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\colon {}_{\mathbb{E}}v \mapsto G\,{}_{\mathbb{E}}v + Q$ und die Abbildung ${}_{\mathbb{F}}\beta_{\mathbb{F}}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon {}_{\mathbb{F}}v \mapsto B\,{}_{\mathbb{F}}v + t$, wobei β die Spiegelung an der Geraden g bezeichnet, und geben Sie die folgenden Matrizen an.

$$F = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}}, \quad G = \boxed{\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}}, \quad B = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte. Tragen Sie „divergent“ ein, falls kein Grenzwert existiert.

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{(-5)^k}{4^k} = \boxed{\text{divergent}} \qquad \lim_{n\to\infty} 4^{-n} n! = \boxed{\text{divergent}}$$

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} 3\left(\frac{1}{4}\right)^k = \boxed{4} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n} - \frac{1}{4} = \boxed{-\frac{1}{4}}$$

Aufgabe 5 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Gegeben ist das Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\right).$$

Bestimmen Sie die Koordinatentransformation von Standard- auf $\mathbb{F}$-Koordinaten und umgekehrt.

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}\left({}_{\mathbb{F}}v\right) = \boxed{\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}}\,{}_{\mathbb{F}}v + \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}}, \quad {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\left({}_{\mathbb{E}}v\right) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}}\,{}_{\mathbb{E}}v + \boxed{\begin{pmatrix} 5 \\ -13 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 6 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Gegeben ist bezüglich des Standardkoordinatensystems $\mathbb{E}$ die Quadrik

$$\mathcal{Q} = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -2x_1^2 - 12x_1 + x_2 - 19 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$, in dem die Gleichung der Quadrik euklidische Normalform hat. Geben Sie diese Normalform sowie F und t für die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}\colon {}_{\mathbb{F}}v \mapsto F\,{}_{\mathbb{F}}v + t$ an. Skizzieren Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ sowie die Quadrik im Standardkoordinatensystem.

euklidische Normalform:

$$\mathcal{Q}\colon \boxed{-4z_1^2 + 2z_2 = 0} \qquad F = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \qquad t = \boxed{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}}$$