Aufgabe 6 (7 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ■7

Gegeben seien die komplexen Zahlen

$$z_1 = -\frac{5}{2}(1+\mathrm{i}\sqrt{3}) \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{5}{2}(\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}).$$

(a) Bestimmen Sie jeweils den Betrag und das Argument der Zahlen z_1 und $1/z_2^2$. Geben Sie dabei die Argumente als Zahlen im Intervall $[0, 2\pi)$ an.

$|z_1| =$ 5 $\qquad \arg(z_1) = \frac{4}{3}\pi$

$|1/z_2^2| = \frac{1}{25}$ $\qquad \arg(1/z_2^2) = \frac{3}{2}\pi$

(b) Geben Sie alle Lösungen $w \in \mathbb{C}$ der Gleichung $w^3 z_2^2 = z_1$ in Polarkoordinaten an.

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}\left(\cos\left(\frac{5}{18}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5}{18}\pi\right)\right)$$
$$w_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}\left(\cos\left(\frac{17}{18}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{17}{18}\pi\right)\right)$$
$$w_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}\left(\cos\left(\frac{29}{18}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{29}{18}\pi\right)\right)$$

Scheinklausur — **Höhere Mathematik 1** — **16. 12. 2017**

■1 ☐2 ☐3 ☐4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Sei $E\colon e_1, e_2, e_3$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$, sowie $B\colon v_1, v_2, v_3$ die Basis mit

$$v_1 = e_1, \quad v_2 = e_1 + e_2, \quad v_3 = 3e_1 + e_2 + 3e_3.$$

Ferner sei die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch die Matrix ${}_ET_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Matrizen ${}_E\mathrm{id}_B$ und ${}_B\mathrm{id}_E$.

$${}_E\mathrm{id}_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad {}_B\mathrm{id}_E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie den Vektor ${}_ET(v_3)$.

$${}_ET(v_3) = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (7 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ■7

Wir betrachten das folgende, von einem reellen Parameter α abhängige lineare Gleichungssystem:

$$\begin{cases} x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 = 0 \\ \alpha x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + \alpha x_3 = (\alpha - 2)^2 \end{cases}$$

(a) Entscheiden Sie, für welche Werte $\alpha \in \mathbb{R}$ das obige Gleichungssystem keine Lösung, genau eine Lösung, bzw. unendlich viele Lösungen besitzt.

keine Lösung:	$\alpha = 1$
genau eine Lösung:	$\alpha \neq -1, 1$
unendlich viele Lösungen:	$\alpha = -1$

(b) Bestimmen Sie die Inverse der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(c) Bestimmen Sie alle Lösungen des obigen Gleichungssystems für $\alpha = 3$.

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T$$

Aufgabe 4 (7 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ■7

Gegeben seien die Punkte P, Q und R in $\mathbb{R}^3$ im Standardkoordinatensystem durch:

$$P = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 2 - 2\sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ 1 \\ \sqrt{2} - \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene E, die von P, Q und R aufgespannt wird.

$$E\colon \quad \frac{-\sqrt{2}}{2} \cdot x_1 + \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot x_2 + \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot x_3 = \frac{5}{2}$$

(b) Sei F die Ebene, die von den Punkten P und R, sowie dem Ursprung O aufgespannt wird. Bestimmen Sie den Schnitt $E \cap F$ der beiden Ebenen E und F.

$$E \cap F = \left\{ \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 5 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Sei α ein reeller Parameter. Wir betrachten im Folgenden die Polynome

$$p_\alpha(X) = -\alpha X^2 + X + 2, \quad q_\alpha(X) = 2X^2 + X - \alpha \quad \text{und} \quad r(X) = 2X^2 + X - 1$$

als Vektoren des Vektorraums $\mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}$ der reellen Polynome vom Grad höchstens zwei.

(a) Stellen Sie $s(X) = X^2 + X + 1$ als Linearkombination von $p_2(X), q_2(X)$ und $r(X)$ dar.

$$s(X) = \frac{1}{4} \cdot p_2(X) + -\frac{5}{4} \cdot q_2(X) + 2 \cdot r(X)$$

(b) Für welche Werte von α sind die Vektoren $p_\alpha(X)$, $q_\alpha(X)$ und $r(X)$ linear abhängig?

$$\alpha \in \{-2, 1\}$$

(c) Für welche Werte von α ist $\{p_\alpha(X), q_\alpha(X), r(X)\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}$?

$$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$$

Aufgabe 6 (7 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ■7

Gegeben seien die komplexen Zahlen

$$z_1 = 2(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}) \quad \text{und} \quad z_2 = 2(\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}).$$

(a) Bestimmen Sie jeweils den Betrag und das Argument der Zahlen z_1 und $1/z_2^2$.
Geben Sie dabei die Argumente als Zahlen im Intervall $[0, 2\pi)$ an.

$|z_1| = \boxed{4}$ $\qquad$ $\arg(z_1) = \boxed{\frac{5}{3}\pi}$

$|1/z_2^2| = \boxed{\frac{1}{16}}$ $\qquad$ $\arg(1/z_2^2) = \boxed{\frac{\pi}{2}}$

(b) Geben Sie alle Lösungen $w \in \mathbb{C}$ der Gleichung $w^3 z_2^2 = z_1$ in Polarkoordinaten an.

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\left(\cos\left(\frac{1}{18}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{1}{18}\pi\right)\right)$$
$$w_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\left(\cos\left(\frac{13}{18}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{13}{18}\pi\right)\right)$$
$$w_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\left(\cos\left(\frac{25}{18}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{25}{18}\pi\right)\right)$$

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ☐1 ■2 ☐3 ☐4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Sei $E\colon e_1, e_2, e_3$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$, sowie $B\colon v_1, v_2, v_3$ die Basis mit

$$v_1 = 4e_1, \quad v_2 = 3e_1 + e_2, \quad v_3 = 5e_1 + 3e_2 + e_3.$$

Ferner sei die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch die Matrix ${}_ET_E = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Matrizen ${}_E\mathrm{id}_B$ und ${}_B\mathrm{id}_E$.

$${}_E\mathrm{id}_B = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \qquad {}_B\mathrm{id}_E = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

(b) Bestimmen Sie den Vektor ${}_ET(v_3)$.

$${}_ET(v_3) = \boxed{\begin{pmatrix} 16 \\ 17 \\ 6 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 3 (7 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ■7

Wir betrachten das folgende, von einem reellen Parameter α abhängige lineare Gleichungssystem:

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \alpha x_3 = (\alpha - 2)^2 \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

(a) Entscheiden Sie, für welche Werte $\alpha \in \mathbb{R}$ das obige Gleichungssystem keine Lösung, genau eine Lösung, bzw. unendlich viele Lösungen besitzt.

keine Lösung:	$\alpha = 0$
genau eine Lösung:	$\alpha \neq 0, 1$
unendlich viele Lösungen:	$\alpha = 1$

(b) Bestimmen Sie die Inverse der Matrix $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}}$$

(c) Bestimmen Sie alle Lösungen des obigen Gleichungssystems für $\alpha = 3$.

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^T}$$

Aufgabe 4 (7 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ■7

Gegeben seien die Punkte P, Q und R in $\mathbb{R}^3$ im Standardkoordinatensystem durch:

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 5\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 2 + \sqrt{2} \\ 1 + 5\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 5\sqrt{2} - \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene E, die von P, Q und R aufgespannt wird.

$$E\colon \quad \boxed{\frac{-\sqrt{6}}{4}} \cdot x_1 + \boxed{\frac{-\sqrt{2}}{2}} \cdot x_2 + \boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}} \cdot x_3 = \boxed{\frac{3}{2}}$$

(b) Sei F die Ebene, die von den Punkten P und R, sowie dem Ursprung O aufgespannt wird. Bestimmen Sie den Schnitt $E \cap F$ der beiden Ebenen E und F.

$$\boxed{E \cap F = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 5\sqrt{2} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

Aufgabe 5 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Sei α ein reeller Parameter. Wir betrachten im Folgenden die Polynome

$$p_\alpha(X) = -\alpha X^2 + X + 3, \quad q_\alpha(X) = 3X^2 + X - \alpha \quad \text{und} \quad r(X) = 2X^2 + X - 1$$

als Vektoren des Vektorraums $\mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}$ der reellen Polynome vom Grad höchstens zwei.

(a) Stellen Sie $s(X) = X^2 + X + 2$ als Linearkombination von $p_3(X), q_3(X)$ und $r(X)$ dar.

$$s(X) = \boxed{-\frac{1}{6}} \cdot p_3(X) + \boxed{-\frac{11}{6}} \cdot q_3(X) + 3 \cdot r(X)$$

(b) Für welche Werte von α sind die Vektoren $p_\alpha(X)$, $q_\alpha(X)$ und $r(X)$ linear abhängig?

$$\boxed{\alpha \in \{-3, 2\}}$$

(c) Für welche Werte von α ist $\{p_\alpha(X), q_\alpha(X), r(X)\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}$?

$$\boxed{\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}}$$

Aufgabe 6 (7 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ■7

Gegeben seien die komplexen Zahlen

$$z_1 = -3\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{3}{2}(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}).$$

(a) Bestimmen Sie jeweils den Betrag und das Argument der Zahlen z_1 und $1/z_2^2$. Geben Sie dabei die Argumente als Zahlen im Intervall $[0, 2\pi)$ an.

$$|z_1| = \boxed{3} \qquad \arg(z_1) = \boxed{\frac{5}{4}\pi}$$

$$|1/z_2^2| = \boxed{\frac{1}{9}} \qquad \arg(1/z_2^2) = \boxed{\frac{4}{3}\pi}$$

(b) Geben Sie alle Lösungen $w \in \mathbb{C}$ der Gleichung $w^3 z_2^2 = z_1$ in Polarkoordinaten an.

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\left(\cos\left(\frac{7}{36}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7}{36}\pi\right)\right)$$
$$w_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\left(\cos\left(\frac{31}{36}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{31}{36}\pi\right)\right)$$
$$w_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\left(\cos\left(\frac{55}{36}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{55}{36}\pi\right)\right)$$

Scheinklausur **Höhere Mathematik 1** **16. 12. 2017**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ☐1 ☐2 ■3 ☐4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Sei $E\colon e_1, e_2, e_3$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$, sowie $B\colon v_1, v_2, v_3$ die Basis mit

$$v_1 = e_1, \quad v_2 = 2e_1 + 3e_2, \quad v_3 = 3e_1 + 2e_2 + e_3.$$

Ferner sei die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch die Matrix ${}_ET_E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Matrizen ${}_E\mathrm{id}_B$ und ${}_B\mathrm{id}_E$.

$${}_E\mathrm{id}_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}_B\mathrm{id}_E = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie den Vektor ${}_ET(v_3)$.

$${}_ET(v_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (7 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ■7

Wir betrachten das folgende, von einem reellen Parameter α abhängige lineare Gleichungssystem:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \alpha x_3 = (\alpha+1)^2 \\ \alpha x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

(a) Entscheiden Sie, für welche Werte $\alpha \in \mathbb{R}$ das obige Gleichungssystem keine Lösung, genau eine Lösung, bzw. unendlich viele Lösungen besitzt.

keine Lösung: $\alpha = 1$

genau eine Lösung: $\alpha \neq -1, 1$

unendlich viele Lösungen: $\alpha = -1$

(b) Bestimmen Sie die Inverse der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Bestimmen Sie alle Lösungen des obigen Gleichungssystems für $\alpha = -2$.

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}^T$$

Aufgabe 4 (7 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ■7

Gegeben seien die Punkte P, Q und R in $\mathbb{R}^3$ im Standardkoordinatensystem durch:

$$P = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 2+2\sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}-\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene E, die von P, Q und R aufgespannt wird.

$$E\colon \quad \frac{-\sqrt{2}}{4} \cdot x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x_2 + \frac{-\sqrt{6}}{4} \cdot x_3 = \frac{5}{2}$$

(b) Sei F die Ebene, die von den Punkten P und R, sowie dem Ursprung O aufgespannt wird. Bestimmen Sie den Schnitt $E \cap F$ der beiden Ebenen E und F.

$$E \cap F = \left\{ \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 5 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Sei α ein reeller Parameter. Wir betrachten im Folgenden die Polynome

$$p_\alpha(X) = -\alpha X^2 + X - 2, \quad q_\alpha(X) = -2X^2 + X - \alpha \quad \text{und} \quad r(X) = -2X^2 + X + 1$$

als Vektoren des Vektorraums $\mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}$ der reellen Polynome vom Grad höchstens zwei.

(a) Stellen Sie $s(X) = X^2 + X + 1$ als Linearkombination von $p_0(X), q_0(X)$ und $r(X)$ dar.

$$s(X) = \frac{3}{2} \cdot p_0(X) + -\frac{9}{2} \cdot q_0(X) + 4 \cdot r(X)$$

(b) Für welche Werte von α sind die Vektoren $p_\alpha(X)$, $q_\alpha(X)$ und $r(X)$ linear abhängig?

$\alpha \in \{-1, 2\}$

(c) Für welche Werte von α ist $\{p_\alpha(X), q_\alpha(X), r(X)\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}$?

$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$

Aufgabe 6 (7 Punkte)

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ■7

Gegeben seien die komplexen Zahlen

$$z_1 = \sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2} \quad \text{und} \quad z_2 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

(a) Bestimmen Sie jeweils den Betrag und das Argument der Zahlen z_1 und $1/z_2^2$.
Geben Sie dabei die Argumente als Zahlen im Intervall $[0, 2\pi)$ an.

$|z_1| = \boxed{2}$ $\qquad \arg(z_1) = \boxed{\frac{7}{4}\pi}$

$|1/z_2^2| = \boxed{\frac{1}{4}}$ $\qquad \arg(1/z_2^2) = \boxed{\frac{2}{3}\pi}$

(b) Geben Sie alle Lösungen $w \in \mathbb{C}$ der Gleichung $w^3 z_2^2 = z_1$ in Polarkoordinaten an.

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\cos\left(\frac{5}{36}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5}{36}\pi\right)\right)$$
$$w_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\cos\left(\frac{29}{36}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{29}{36}\pi\right)\right)$$
$$w_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\cos\left(\frac{53}{36}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{53}{36}\pi\right)\right)$$

Scheinklausur **Höhere Mathematik 1** **16. 12. 2017**

☐1 ☐2 ☐3 ■4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt)

☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Sei $E\colon e_1, e_2, e_3$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$, sowie $B\colon v_1, v_2, v_3$ die Basis mit

$$v_1 = 2e_1, \quad v_2 = 5e_1 + 2e_2, \quad v_3 = 5e_1 + e_2 + e_3.$$

Ferner sei die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch die Matrix ${}_ET_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Matrizen ${}_E\mathrm{id}_B$ und ${}_B\mathrm{id}_E$.

$${}_E\mathrm{id}_B = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \qquad {}_B\mathrm{id}_E = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

(b) Bestimmen Sie den Vektor ${}_ET(v_3)$.

$${}_ET(v_3) = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 26 \\ 15 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 3 (7 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ■7

Wir betrachten das folgende, von einem reellen Parameter α abhängige lineare Gleichungssystem:

$$\begin{cases} x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 = 0 \\ \alpha x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + \alpha x_3 = (\alpha+2)^2 \end{cases}$$

(a) Entscheiden Sie, für welche Werte $\alpha \in \mathbb{R}$ das obige Gleichungssystem keine Lösung, genau eine Lösung, bzw. unendlich viele Lösungen besitzt.

keine Lösung:	$\alpha = 2$
genau eine Lösung:	$\alpha \neq -2, 2$
unendlich viele Lösungen:	$\alpha = -2$

(b) Bestimmen Sie die Inverse der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$: $\boxed{\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}}$

(c) Bestimmen Sie alle Lösungen des obigen Gleichungssystems für $\alpha = -3$.

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}^T$$

Aufgabe 4 (7 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ■7

Gegeben seien die Punkte P, Q und R in $\mathbb{R}^3$ im Standardkoordinatensystem durch:

$$P = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 2+2\sqrt{2} \\ -1-\sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2}+\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene E, die von P, Q und R aufgespannt wird.

$$E\colon \quad \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot x_1 + \boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}} \cdot x_2 + \boxed{\frac{-\sqrt{6}}{4}} \cdot x_3 = \boxed{\frac{3}{2}}$$

(b) Sei F die Ebene, die von den Punkten P und R, sowie dem Ursprung O aufgespannt wird. Bestimmen Sie den Schnitt $E \cap F$ der beiden Ebenen E und F.

$$E \cap F = \left\{ \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 5 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Sei α ein reeller Parameter. Wir betrachten im Folgenden die Polynome

$$p_\alpha(X) = -\alpha X^2 + X - 3, \quad q_\alpha(X) = -3X^2 + X - \alpha \quad \text{und} \quad r(X) = -2X^2 + X + 1$$

als Vektoren des Vektorraums $\mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}$ der reellen Polynome vom Grad höchstens zwei.

(a) Stellen Sie $s(X) = X^2 + X + 2$ als Linearkombination von $p_{-1}(X), q_{-1}(X)$ und $r(X)$ dar.

$$s(X) = \boxed{-\frac{1}{4}} \cdot p_{-1}(X) + \boxed{-\frac{15}{4}} \cdot q_{-1}(X) + 5 \cdot r(X)$$

(b) Für welche Werte von α sind die Vektoren $p_\alpha(X)$, $q_\alpha(X)$ und $r(X)$ linear abhängig?

$$\boxed{\alpha \in \{-2, 3\}}$$

(c) Für welche Werte von α ist $\{p_\alpha(X), q_\alpha(X), r(X)\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}$?

$$\boxed{\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}}$$