Aufgabe 8 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter.

Sei $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die stetige Funktion mit $f_\alpha(x) = \begin{cases} x^3 - 2x^2 + 1 & , x < -1 \\ \alpha(x+1)(x+3) - 2 & , x \geqq -1 \end{cases}$.

(a) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte für $x_0 = -1$.

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f_\alpha(x) - f_\alpha(x_0)}{x - x_0} = \boxed{7} \qquad \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f_\alpha(x) - f_\alpha(x_0)}{x - x_0} = \boxed{2\alpha}$$

(b) Für welchen Wert von α ist f_α auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar? $\alpha = \boxed{\frac{7}{2}}$

Aufgabe 9 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Für Konstanten $a, b, t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ ist die Parametrisierung

$$C\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^2 \colon t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ at + b \end{pmatrix}$$

einer Kurve K gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Konstanten t_0, t_1, a, b so, dass C eine Kurve K von $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ parametrisiert.

$$t_0 = \boxed{2} \qquad t_1 = \boxed{3} \qquad a = \boxed{3} \qquad b = \boxed{-2}$$

(b) Bestimmen Sie die Länge der Kurve K aus **(a)**. $L(K) = \boxed{\sqrt{10}}$

(c) Bestimmen Sie ein konservatives Vektorfeld h, welches das folgende Potential U besitzt.

$$U \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \mathrm{e}^{(x_1-3)(x_2+2)} + 3x_1 - 4, \qquad h\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} (x_2+2)\mathrm{e}^{(x_1-3)(x_2+2)} + 3 \\ (x_1-3)\mathrm{e}^{(x_1-3)(x_2+2)} \end{pmatrix}}$$

Berechnen Sie das folgende Kurvenintegral von h längs K aus **(a)**.

$$\int_K h(x) \bullet \mathrm{d}\,x = \boxed{4 - \mathrm{e}^{-6}}$$

Scheinklausur — **Höhere Mathematik 2** — **6. 2. 2018**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ■1 ☐2 ☐3 ☐4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\, x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\, b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Aufgabe 2 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum_{\ell=2}^{\infty} \frac{(z+4+\mathrm{i})^\ell}{(\ell-1)!}$	$\sum_{m=3}^{\infty} \left(\frac{6+(-1)^m}{3}\right)^m (z-2)^m$	$\sum_{n=4}^{\infty} (n^2-3n+4)\,(4z+5\mathrm{i})^n$
z_0	$-4-\mathrm{i}$	2	$-\frac{5}{4}\mathrm{i}$
ρ	$+\infty$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{4}$

Aufgabe 3 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Gegeben sind die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto 2x^2 + xy, \qquad g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto y - 2x - 8.$$

(a) Berechnen Sie:

$$\nabla f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{4x+y} \\ \boxed{x} \end{pmatrix}, \qquad \nabla g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{-2} \\ \boxed{1} \end{pmatrix}.$$

(b) Betrachten Sie die Menge $K := \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; g\binom{x}{y} = 0 \right\}$ und geben Sie die kritische Stelle von $f|_K$, also der Einschränkung von f auf K, inklusive Funktionswert an.

$$f\left(\boxed{(-1,6)}\right) = \boxed{-4}$$

(c) Bestimmen Sie die Tangente an die Niveaulinie $\left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f\binom{x}{y} = 2 \right\}$ im Punkt $(1,0)$.

$$\boxed{4}\; x + \boxed{1}\; y + \boxed{(-4)} = 0$$

(d) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix von $\nabla f + \lambda \nabla g$, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist.

$$\mathrm{J}(\nabla f + \lambda \nabla g)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{4} & \boxed{1} \\ \boxed{1} & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Berechnen Sie:

$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \left((-1)^n + \frac{1}{n} - n\right)$	$\lim_{N\to+\infty} 10 \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{\mathrm{i}}{3}\right)^k$	$\lim_{N\to+\infty} 4 \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{16^k}{(2k)!}$
$-\infty$	$9+3\mathrm{i}$	$4\cos(4)$

Aufgabe 5 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Berechnen Sie die folgenden Integrale (dabei ist $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$).

$$\int -3\sin(x)\sqrt{\cos(x)}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[2\,(\cos(x))^{\frac{3}{2}}\right]}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} -3\sin(x)\sqrt{\cos(x)}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{-2}$$

$$\int 2t|\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-2)t}|\,\mathrm{d}\,t = \boxed{\left[-\mathrm{e}^{-2t}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right]}$$

Aufgabe 6 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Führen Sie eine Polynomdivision sowie eine Partialbruchzerlegung durch.

(a) Polynomdivision:

$$\frac{-3x^2+3x+10}{x^2-2x-3} = \boxed{-3 + \frac{-3x+1}{x^2-2x-3}}$$

(b) Partialbruchzerlegung:

$$\frac{-3x^2+3x+10}{x^2-2x-3} = \boxed{-3 - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x-3}}$$

Aufgabe 7 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Gegeben sei das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2xy\cos(xy) + 2\sin(xy) + 2y\mathrm{e}^{2x} + 12x^3 \\ 2x^2\cos(xy) + \mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ein Potential U von f so, dass $U(0,0) = 0$ gilt.

$$U\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{2x\sin(xy) + y\mathrm{e}^{2x} + 3x^4}$$

Aufgabe 8 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter.

Sei $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die stetige Funktion mit $f_\alpha(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 + 1 & , x < -1 \\ \alpha(x+1)(x-4) + 3 & , x \geqq -1 \end{cases}$.

(a) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte für $x_0 = -1$.

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f_\alpha(x) - f_\alpha(x_0)}{x - x_0} = \boxed{-3} \qquad \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f_\alpha(x) - f_\alpha(x_0)}{x - x_0} = \boxed{-5\alpha}$$

(b) Für welchen Wert von α ist f_α auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar? $\alpha = \boxed{\frac{3}{5}}$

Aufgabe 9 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Für Konstanten $a, b, t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ ist die Parametrisierung

$$C\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^2 \colon t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ at + b \end{pmatrix}$$

einer Kurve K gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Konstanten t_0, t_1, a, b so, dass C eine Kurve K von $\begin{pmatrix} -2 \\ -7 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$ parametrisiert.

$$t_0 = \boxed{-2} \qquad t_1 = \boxed{-1} \qquad a = \boxed{2} \qquad b = \boxed{-3}$$

(b) Bestimmen Sie die Länge der Kurve K aus **(a)**. $L(K) = \boxed{\sqrt{5}}$

(c) Bestimmen Sie ein konservatives Vektorfeld h, welches das folgende Potential U besitzt.

$$U\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \mathrm{e}^{(x_1+2)(x_2+3)} + 2x_2 - 3, \qquad h\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} (x_2+3)\mathrm{e}^{(x_1+2)(x_2+3)} \\ (x_1+2)\mathrm{e}^{(x_1+2)(x_2+3)} + 2 \end{pmatrix}}$$

Berechnen Sie das folgende Kurvenintegral von h längs K aus **(a)**.

$$\int_K h(x) \bullet \mathrm{d}\,x = \boxed{3 + \mathrm{e}^{-2}}$$

Scheinklausur **Höhere Mathematik 2** **6. 2. 2018**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ☐1 ■2 ☐3 ☐4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Aufgabe 2 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum_{\ell=2}^{\infty}(\ell^2+\ell-8)(-3z-7\mathrm{i})^{\ell}$	$\sum_{m=3}^{\infty}\frac{(z+2-\mathrm{i})^m}{(m-3)!}$	$\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{7+(-1)^n}{5}\right)^n(z+3)^n$
z_0	$-\frac{7}{3}\mathrm{i}$	$-2+\mathrm{i}$	-3
ρ	$\frac{1}{3}$	$+\infty$	$\frac{5}{8}$

Aufgabe 3 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Gegeben sind die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto 3x^2 + 2xy, \qquad g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto y + 2x - 3.$$

(a) Berechnen Sie:

$$\nabla f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{6x+2y} \\ \boxed{2x} \end{pmatrix}, \qquad \nabla g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{2} \\ \boxed{1} \end{pmatrix}.$$

(b) Betrachten Sie die Menge $K := \left\{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, g\binom{x}{y} = 0\right\}$ und geben Sie die kritische Stelle von $f|_K$, also der Einschränkung von f auf K, inklusive Funktionswert an.

$$f\left(\boxed{(3,-3)}\right) = \boxed{9}$$

(c) Bestimmen Sie die Tangente an die Niveaulinie $\left\{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, f\binom{x}{y} = 3\right\}$ im Punkt $(1,0)$.

$$\boxed{6}\,x + \boxed{2}\,y + \boxed{(-6)} = 0$$

(d) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix von $\nabla f + \lambda \nabla g$, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist.

$$\mathrm{J}(\nabla f + \lambda\nabla g)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{6} & \boxed{2} \\ \boxed{2} & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Berechnen Sie:

$\lim_{N\to+\infty} 4\sum_{k=0}^{N}(-1)^k\frac{16^k}{(2k+1)!}$	$\lim_{n\to+\infty}\left((-1)^n + \frac{1}{n} + n\right)$	$\lim_{N\to+\infty} 10\sum_{k=0}^{N}\left(-\frac{\mathrm{i}}{3}\right)^k$
$\sin(4)$	$+\infty$	$9-3\mathrm{i}$

Aufgabe 5 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Berechnen Sie die folgenden Integrale (dabei ist $x \in [0,\pi]$).

$$\int 3\cos(x)\sqrt{\sin(x)}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[2\,(\sin(x))^{\frac{3}{2}}\right]}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos(x)\sqrt{\sin(x)}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{2}$$

$$\int 3t|\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-3)t}|\,\mathrm{d}\,t = \boxed{\left[-\mathrm{e}^{-3t}\left(t+\frac{1}{3}\right)\right]}$$

Aufgabe 6 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Führen Sie eine Polynomdivision sowie eine Partialbruchzerlegung durch.

(a) Polynomdivision:

$$\frac{3x^2-2x-11}{x^2-x-2} = \boxed{3 + \frac{x-5}{x^2-x-2}}$$

(b) Partialbruchzerlegung:

$$\frac{3x^2-2x-11}{x^2-x-2} = \boxed{3 + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-2}}$$

Aufgabe 7 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Gegeben sei das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -3xy\sin(xy) + 3y\mathrm{e}^{3x} + 12x^2 + 3\cos(xy) \\ -3x^2\sin(xy) + \mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ein Potential U von f so, dass $U(0,0) = 0$ gilt.

$$U\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{3x\cos(xy) + y\mathrm{e}^{3x} + 4x^3}$$

Aufgabe 8 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter.
Sei $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die stetige Funktion mit $f_\alpha(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 - 1 & , x < -1 \\ \alpha(x+1)(x+5) - 5 & , x \geqq -1 \end{cases}$.

(a) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte für $x_0 = -1$.

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f_\alpha(x) - f_\alpha(x_0)}{x - x_0} = \boxed{9} \qquad \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f_\alpha(x) - f_\alpha(x_0)}{x - x_0} = \boxed{4\alpha}$$

(b) Für welchen Wert von α ist f_α auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar? $\alpha = \boxed{\frac{9}{4}}$

Aufgabe 9 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Für Konstanten $a, b, t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ ist die Parametrisierung

$$C\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^2 \colon t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ at + b \end{pmatrix}$$

einer Kurve K gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Konstanten t_0, t_1, a, b so, dass C eine Kurve K von $\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 4 \\ -10 \end{pmatrix}$ parametrisiert.

$$t_0 = \boxed{3} \qquad t_1 = \boxed{4} \qquad a = \boxed{-3} \qquad b = \boxed{2}$$

(b) Bestimmen Sie die Länge der Kurve K aus **(a)**. $L(K) = \boxed{\sqrt{10}}$

(c) Bestimmen Sie ein konservatives Vektorfeld h, welches das folgende Potential U besitzt.

$$U\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \mathrm{e}^{(x_1-4)(x_2-2)} - 3x_1 - 2, \qquad h\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} (x_2-2)\mathrm{e}^{(x_1-4)(x_2-2)} - 3 \\ (x_1-4)\mathrm{e}^{(x_1-4)(x_2-2)} \end{pmatrix}}$$

Berechnen Sie das folgende Kurvenintegral von h längs K aus **(a)**.

$$\int_K h(x) \bullet \mathrm{d}\,x = \boxed{-2 - \mathrm{e}^9}$$

Scheinklausur **Höhere Mathematik 2** **6. 2. 2018**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ☐1 ☐2 ■3 ☐4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum\limits_{\ell=2}^{\infty}\left(\frac{4+(-1)^\ell}{3}\right)^\ell (z-3)^\ell$	$\sum\limits_{m=3}^{\infty}(m^2-3m+2)\,(5z+8\mathrm{i})^m$	$\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{(z-2+5\mathrm{i})^n}{(n-2)!}$
z_0	3	$-\frac{8}{5}\mathrm{i}$	$2-5\mathrm{i}$
ρ	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$+\infty$

Aufgabe 3 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Gegeben sind die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2 - 2xy, \qquad g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto y - 2x + 6.$$

(a) Berechnen Sie:

$$\nabla f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-2y \\ -2x \end{pmatrix}, \qquad \nabla g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Betrachten Sie die Menge $K := \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; g\binom{x}{y} = 0 \right\}$ und geben Sie die kritische Stelle von $f|_K$, also der Einschränkung von f auf K, inklusive Funktionswert an.

$$f\big((2,-2)\big) = 12$$

(c) Bestimmen Sie die Tangente an die Niveaulinie $\left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f\binom{x}{y} = 1 \right\}$ im Punkt $(1,0)$.

$$2\;x \;+\; (-2)\;y \;+\; (-2) \;=0$$

(d) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix von $\nabla f + \lambda \nabla g$, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist.

$$\mathrm{J}(\nabla f + \lambda \nabla g)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Berechnen Sie:

$\lim\limits_{N\to+\infty} 5\sum\limits_{k=0}^{N}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^k$	$\lim\limits_{N\to+\infty} 3\sum\limits_{k=0}^{N}(-1)^k\frac{9^k}{(2k+1)!}$	$\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\left((-1)^n - \frac{1}{n} - n\right)$
$4+2\mathrm{i}$	$\sin(3)$	$-\infty$

Aufgabe 5 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Berechnen Sie die folgenden Integrale (dabei ist $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$).

$$\int -6\sin(x)\sqrt{\cos(x)}\,\mathrm{d}\,x = \left[4\,(\cos(x))^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} -6\sin(x)\sqrt{\cos(x)}\,\mathrm{d}\,x = -4$$

$$\int 4t\left|\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-4)t}\right|\mathrm{d}\,t = \left[-\mathrm{e}^{-4t}\left(t+\frac{1}{4}\right)\right]$$

Aufgabe 6 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Führen Sie eine Polynomdivision sowie eine Partialbruchzerlegung durch.

(a) Polynomdivision:

$$\frac{2x^2+4x-15}{x^2+x-2} = 2 + \frac{2x-11}{x^2+x-2}$$

(b) Partialbruchzerlegung:

$$\frac{2x^2+4x-15}{x^2+x-2} = 2 + \frac{5}{x+2} - \frac{3}{x-1}$$

Aufgabe 7 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Gegeben sei das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4y\mathrm{e}^{4x} + 9x^2 + 3xy\cos(xy) + 3\sin(xy) \\ 3x^2\cos(xy) + \mathrm{e}^{4x} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ein Potential U von f so, dass $U(0,0) = 0$ gilt.

$$U\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3x\sin(xy) + y\mathrm{e}^{4x} + 3x^3$$

Aufgabe 8 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter.
Sei $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die stetige Funktion mit $f_\alpha(x) = \begin{cases} x^3 + 4x^2 + 1 & , x < -1 \\ \alpha(x+1)(x-2) + 4 & , x \geqq -1 \end{cases}$.

(a) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte für $x_0 = -1$.

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f_\alpha(x) - f_\alpha(x_0)}{x - x_0} = \boxed{-5} \qquad \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f_\alpha(x) - f_\alpha(x_0)}{x - x_0} = \boxed{-3\alpha}$$

(b) Für welchen Wert von α ist f_α auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar? $\alpha = \boxed{\frac{5}{3}}$

Aufgabe 9 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Für Konstanten $a, b, t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ ist die Parametrisierung

$$C\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ at + b \end{pmatrix}$$

einer Kurve K gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Konstanten t_0, t_1, a, b so, dass C eine Kurve K von $\begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ parametrisiert.

$t_0 = \boxed{-3}$ $t_1 = \boxed{-2}$ $a = \boxed{-2}$ $b = \boxed{3}$

(b) Bestimmen Sie die Länge der Kurve K aus **(a)**. $L(K) = \boxed{\sqrt{5}}$

(c) Bestimmen Sie ein konservatives Vektorfeld h, welches das folgende Potential U besitzt.

$$U\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \mathrm{e}^{(x_1+3)(x_2-3)} - 3x_2 + 4, \qquad h\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} (x_2-3)\mathrm{e}^{(x_1+3)(x_2-3)} \\ (x_1+3)\mathrm{e}^{(x_1+3)(x_2-3)} - 3 \end{pmatrix}}$$

Berechnen Sie das folgende Kurvenintegral von h längs K aus **(a)**.

$$\int_K h(x) \bullet \mathrm{d}\,x = \boxed{5 + \mathrm{e}^4}$$

Scheinklausur | **Höhere Mathematik 2** | **6. 2. 2018**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ☐1 ☐2 ☐3 ■4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\left(\cos(x)\right)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\, b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (3 Punkte) □0 □1 □2 ■3

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum_{\ell=2}^{\infty} \frac{(z-3+7\mathrm{i})^\ell}{(\ell-2)!}$	$\sum_{m=3}^{\infty} \left(\frac{4+(-1)^m}{2}\right)^m (z+2)^m$	$\sum_{n=4}^{\infty} (n^2+n+1)\,(-2z+3\mathrm{i})^n$
z_0	$3-7\mathrm{i}$	-2	$\frac{3}{2}\mathrm{i}$
ρ	$+\infty$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$

Aufgabe 3 (6 Punkte) □0 □1 □2 □3 □4 □5 ■6

Gegeben sind die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto -2x^2 + xy, \qquad g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto y + 2x + 8.$$

(a) Berechnen Sie:

$$\nabla f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{-4x+y} \\ \boxed{x} \end{pmatrix}, \qquad \nabla g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{2} \\ \boxed{1} \end{pmatrix}.$$

(b) Betrachten Sie die Menge $K := \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, g\binom{x}{y} = 0 \right\}$ und geben Sie die kritische Stelle von $f|_K$, also der Einschränkung von f auf K, inklusive Funktionswert an.

$$f\left(\boxed{(-1,-6)}\right) = \boxed{4}$$

(c) Bestimmen Sie die Tangente an die Niveaulinie $\left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, f\binom{x}{y} = -2 \right\}$ im Punkt $(1, 0)$.

$$\boxed{(-4)}\; x + \boxed{1}\; y + \boxed{4} = 0$$

(d) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix von $\nabla f + \lambda \nabla g$, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist.

$$\mathrm{J}(\nabla f + \lambda \nabla g) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{-4} & \boxed{1} \\ \boxed{1} & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 (3 Punkte) □0 □1 □2 ■3

Berechnen Sie:

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left((-1)^n - \frac{1}{n} + n\right)$	$\lim\limits_{N\to+\infty} 5 \sum_{k=0}^{N} \left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^k$	$\lim\limits_{N\to+\infty} 3 \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{9^k}{(2k)!}$
$+\infty$	$4-2\mathrm{i}$	$3\cos(3)$

Aufgabe 5 (3 Punkte) □0 □1 □2 ■3

Berechnen Sie die folgenden Integrale (dabei ist $x \in [0, \pi]$).

$$\int 6\cos(x)\sqrt{\sin(x)}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[4\,(\sin(x))^{\frac{3}{2}}\right]}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 6\cos(x)\sqrt{\sin(x)}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{4}$$

$$\int 5t|\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-5)t}|\,\mathrm{d}\,t = \boxed{\left[-\mathrm{e}^{-5t}\left(t + \frac{1}{5}\right)\right]}$$

Aufgabe 6 (4 Punkte) □0 □1 □2 □3 ■4

Führen Sie eine Polynomdivision sowie eine Partialbruchzerlegung durch.

(a) Polynomdivision:

$$\frac{-2x^2-3x-11}{x^2+2x-3} = \boxed{-2 + \frac{x-17}{x^2+2x-3}}$$

(b) Partialbruchzerlegung:

$$\frac{-2x^2-3x-11}{x^2+2x-3} = \boxed{-2 + \frac{5}{x+3} - \frac{4}{x-1}}$$

Aufgabe 7 (3 Punkte) □0 □1 □2 ■3

Gegeben sei das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 8x^3 + 2\cos(xy) - 2xy\sin(xy) + 5y\mathrm{e}^{5x} \\ -2x^2\sin(xy) + \mathrm{e}^{5x} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ein Potential U von f so, dass $U(0,0) = 0$ gilt.

$$U\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{2x\cos(xy) + y\mathrm{e}^{5x} + 2x^4}$$