



**Aufgabe 6** (5 Punkte)

0  1  2  3  4  5

Gegeben seien die folgenden Abbildungen:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto x^2 - 2xy + y^2 \quad g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto 2x^2 + y^2 - 1$$

(a) Geben Sie die drei Gleichungen (in  $x$ ,  $y$  und  $\lambda$ ) an, die die Bedingungen von Lagrange für lokale Extrema von  $f$  unter der Nebenbedingung  $g(x, y) = 0$  beschreiben.

$$\begin{aligned} 2x - 2y + 4\lambda x &= 0 \\ -2x + 2y + 2\lambda y &= 0 \\ 2x^2 + y^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

(b) Finden Sie alle  $(x, y)$  so, dass  $(x, y, \lambda)$  eine Lösung dieses Gleichungssystems ist (für ein  $\lambda \in \mathbb{R}$ ).

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

**Aufgabe 7** (3 Punkte)

0  1  2  3

Berechnen Sie:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^3 - 7x + 2}{3x(2x^2 + 1)}$	$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{2}{\ln(k) \ln(k-1)} \ln\left(\frac{k-1}{k}\right)$	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 \cos(\frac{x\pi}{6}) - 1}{x^2 - 4}$
$\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{\ln(2)}$	$-\frac{\pi}{24} \sqrt{3}$

**Aufgabe 8** (3 Punkte)

0  1  2  3

Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$  ein Parameter. Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die stetige Funktion mit

$$f(x) = |x^2 - 4|(\alpha - 4)(x + 2).$$

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte für  $x_0 = 2$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 16(4 - \alpha) \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 16(\alpha - 4)$$

Für welche  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist  $f$  differenzierbar in  $\mathbb{R}$ ?

$$\alpha = 4$$

1  2  3  4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	$x^a$	$e^x$	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a x^{a-1}$	$e^x$	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
$f(x)$	$b^x$	$\ln x $	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b) b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

$x$	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}^+$$

Viel Erfolg!

**Aufgabe 1** (1 Punkt)

0  1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

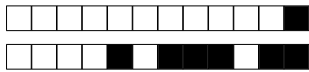
Matrikelnummer:

Gruppe:

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

Name, Vorname:

Matrikelnummer:



**Aufgabe 2** (4 Punkte)



Gegeben seien die Funktionen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die durch

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2} \quad \text{und} \quad g(x) = e^x(4 \sin(x) - \cos(x))$$

definiert sind. Bestimmen Sie die folgenden Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 + 6)}{(x^2 + 2)^2} \quad g'(x) = e^x(5 \sin(x) + 3 \cos(x))$$

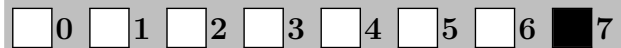
Sei jetzt  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die durch  $H(x) := f(g(x))$  definierte Funktion. Berechnen Sie den Wert, den die Ableitung von  $H$  an der Stelle  $x = 0$  annimmt:

$$H'(0) = \frac{7}{3}$$

Geben Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion  $H$  an der Stelle  $x = 0$  an:

$$y = -\frac{1}{3} + \frac{7}{3}x$$

**Aufgabe 3** (7 Punkte)



Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int_1^2 2x \, dx = 3$$

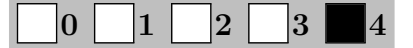
$$\int \frac{-3}{(x+3)^2 + 1} \, dx = [-3 \arctan(x+3)]$$

$$\int e^{4x} \cosh(e^{2x}) \, dx = \left[ \frac{1}{2} (e^{2x} \sinh(e^{2x}) - \cosh(e^{2x})) \right]$$

$$\int \left( \frac{5x}{5x^2 + 1} - \frac{1}{x} \right) dx = \left[ \frac{1}{2} \ln(5x^2 + 1) - \ln|x| \right]$$

$$\int_1^{+\infty} \left( \frac{5x}{5x^2 + 1} - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{5}{6}\right)$$

**Aufgabe 4** (4 Punkte)



Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  die Abbildung, die definiert ist durch

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 4x + 3y.$$

(a) Berechnen Sie  $\text{grad } f(x, y)$ :  $\begin{pmatrix} 2x - y - 4 \\ 2y - x + 3 \end{pmatrix}$

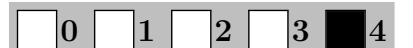
(b) Finden Sie alle kritischen Stellen von  $f$ .  $\left(\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

(c) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix von  $f$ .  $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(d) Bestimmen Sie für jede kritische Stelle den Typ des entsprechenden kritischen Punktes.

lokales Minimum

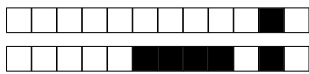
**Aufgabe 5** (4 Punkte)



Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den

Entwicklungspunkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  und den Konvergenzradius  $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ .

	$\sum_{k=1}^{\infty} 5^{k+1}(z+7)^k$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k^2+1}(\sqrt{2}z+3)^k$	$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(z-3)^{2k}}{k!}$
$z_0$	-7	$-\frac{3}{\sqrt{2}}$	3
$\rho$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$+\infty$



**Aufgabe 6** (5 Punkte)

0  1  2  3  4  5

Gegeben seien die folgenden Abbildungen:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto 2x^2 - 4xy + 2y^2 \quad g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto x^2 + 4y^2 - 4$$

(a) Geben Sie die drei Gleichungen (in  $x$ ,  $y$  und  $\lambda$ ) an, die die Bedingungen von Lagrange für lokale Extrema von  $f$  unter der Nebenbedingung  $g(x, y) = 0$  beschreiben.

$$\begin{aligned} 4x - 4y + 2\lambda x &= 0 \\ -4x + 4y + 8\lambda y &= 0 \\ x^2 + 4y^2 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

(b) Finden Sie alle  $(x, y)$  so, dass  $(x, y, \lambda)$  eine Lösung dieses Gleichungssystems ist (für ein  $\lambda \in \mathbb{R}$ ).

$$\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

**Aufgabe 7** (3 Punkte)

0  1  2  3

Berechnen Sie:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2x}{7x^2(3x - 2)}$	$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{4 \ln(k) \ln(k-1)} \ln\left(\frac{k}{k-1}\right)$	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4 \cos\left(\frac{x\pi}{9}\right) - 2}{x^2 - 9}$
$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{4 \ln(2)}$	$-\frac{\pi}{27} \sqrt{3}$

**Aufgabe 8** (3 Punkte)

0  1  2  3

Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$  ein Parameter. Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die stetige Funktion mit

$$f(x) = (\alpha + 5)|x^2 - 9|(x - 1).$$

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte für  $x_0 = 3$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -12(\alpha + 5) \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 12(\alpha + 5)$$

Für welche  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist  $f$  differenzierbar in  $\mathbb{R}$ ?

$\alpha = -5$

1  2  3  4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	$x^a$	$e^x$	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a x^{a-1}$	$e^x$	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
$f(x)$	$b^x$	$\ln x $	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b) b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

$x$	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

**Aufgabe 1** (1 Punkt)

0  1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

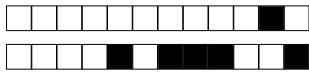
Matrikelnummer:

Gruppe:

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

Name, Vorname:

Matrikelnummer:



**Aufgabe 2** (4 Punkte)



Gegeben seien die Funktionen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die durch

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 3} \quad \text{und} \quad g(x) = e^x(5 \sin(x) - \cos(x))$$

definiert sind. Bestimmen Sie die folgenden Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 + 9)}{(x^2 + 3)^2} \quad g'(x) = e^x(6 \sin(x) + 4 \cos(x))$$

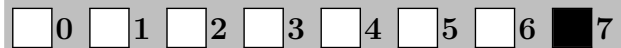
Sei jetzt  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die durch  $H(x) := f(g(x))$  definierte Funktion. Berechnen Sie den Wert, den die Ableitung von  $H$  an der Stelle  $x = 0$  annimmt:

$$H'(0) = \frac{5}{2}$$

Geben Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion  $H$  an der Stelle  $x = 0$  an:

$$y = -\frac{1}{4} + \frac{5}{2}x$$

**Aufgabe 3** (7 Punkte)



Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int_1^2 3x \, dx = \frac{9}{2}$$

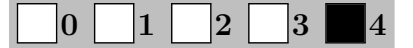
$$\int \frac{-2}{(x+2)^2 + 1} \, dx = [-2 \arctan(x+2)]$$

$$\int e^{6x} \cosh(e^{3x}) \, dx = \left[ \frac{1}{3} (e^{3x} \sinh(e^{3x}) - \cosh(e^{3x})) \right]$$

$$\int \left( \frac{4x}{4x^2 + 1} - \frac{1}{x} \right) dx = \left[ \frac{1}{2} \ln(4x^2 + 1) - \ln|x| \right]$$

$$\int_1^{+\infty} \left( \frac{4x}{4x^2 + 1} - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{4}{5}\right)$$

**Aufgabe 4** (4 Punkte)



Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  die Abbildung, die definiert ist durch

$$f(x, y) = -2x^2 + xy - y^2 + x + 2y.$$

(a) Berechnen Sie  $\text{grad } f(x, y)$ :  $\begin{pmatrix} -4x + y + 1 \\ -2y + x + 2 \end{pmatrix}$

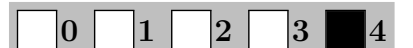
(b) Finden Sie alle kritischen Stellen von  $f$ .  $\left( \frac{4}{7}, \frac{9}{7} \right)$

(c) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix von  $f$ .  $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

(d) Bestimmen Sie für jede kritische Stelle den Typ des entsprechenden kritischen Punktes.

lokales Maximum

**Aufgabe 5** (4 Punkte)



Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den

Entwicklungspunkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  und den Konvergenzradius  $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ .

	$\sum_{k=1}^{\infty} 7^{k+1}(z+6)^k$	$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(z-2)^{2k}}{k!}$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{7^k}{k^2+1} (\sqrt{2}z+7)^k$
$z_0$	-6	2	$-\frac{7}{\sqrt{2}}$
$\rho$	$\frac{1}{7}$	$+\infty$	$\frac{1}{7\sqrt{2}}$



**Aufgabe 6** (5 Punkte)

0  1  2  3  4  5

Gegeben seien die folgenden Abbildungen:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto -x^2 + 2xy - y^2 \quad g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto x^2 + 3y^2 - 2$$

(a) Geben Sie die drei Gleichungen (in  $x$ ,  $y$  und  $\lambda$ ) an, die die Bedingungen von Lagrange für lokale Extrema von  $f$  unter der Nebenbedingung  $g(x, y) = 0$  beschreiben.

$$\begin{aligned} -2x + 2y + 2\lambda x &= 0 \\ 2x - 2y + 6\lambda y &= 0 \\ x^2 + 3y^2 - 2 &= 0 \end{aligned}$$

(b) Finden Sie alle  $(x, y)$  so, dass  $(x, y, \lambda)$  eine Lösung dieses Gleichungssystems ist (für ein  $\lambda \in \mathbb{R}$ ).

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{3}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(-\frac{3}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

**Aufgabe 7** (3 Punkte)

0  1  2  3

Berechnen Sie:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 + 8x^2 - 3}{2x(3x^2 + 5)}$	$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{3}{\ln(k) \ln(k-1)} \ln\left(\frac{k-1}{k}\right)$	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 \sin\left(\frac{x\pi}{12}\right) - 2}{x^2 - 4}$
$\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{\ln(2)}$	$\frac{\pi}{24} \sqrt{3}$

**Aufgabe 8** (3 Punkte)

0  1  2  3

Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$  ein Parameter. Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die stetige Funktion mit

$$f(x) = (\alpha - 2)(x - 1)|x^2 - 16|.$$

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte für  $x_0 = 4$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 24(2 - \alpha) \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 24(\alpha - 2)$$

Für welche  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist  $f$  differenzierbar in  $\mathbb{R}$ ?

$$\alpha = 2$$

1  2  3  4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	$x^a$	$e^x$	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a x^{a-1}$	$e^x$	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
$f(x)$	$b^x$	$\ln x $	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b) b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

$x$	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}^+$$

Viel Erfolg!

**Aufgabe 1** (1 Punkt)

0  1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

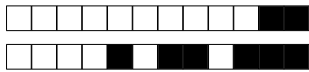
Matrikelnummer:

Gruppe:

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

Name, Vorname:

Matrikelnummer:



**Aufgabe 2** (4 Punkte)



Gegeben seien die Funktionen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die durch

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 4} \quad \text{und} \quad g(x) = e^x(6 \sin(x) - \cos(x))$$

definiert sind. Bestimmen Sie die folgenden Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 + 12)}{(x^2 + 4)^2} \quad g'(x) = e^x(7 \sin(x) + 5 \cos(x))$$

Sei jetzt  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die durch  $H(x) := f(g(x))$  definierte Funktion. Berechnen Sie den Wert, den die Ableitung von  $H$  an der Stelle  $x = 0$  annimmt:

$$H'(0) = \frac{13}{5}$$

Geben Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion  $H$  an der Stelle  $x = 0$  an:

$$y = -\frac{1}{5} + \frac{13}{5}x$$

**Aufgabe 3** (7 Punkte)



Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int_1^2 4x \, dx = 6$$

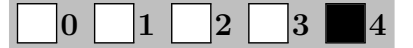
$$\int \frac{3}{(x-3)^2 + 1} \, dx = [3 \arctan(x-3)]$$

$$\int e^{4x} \sinh(e^{2x}) \, dx = \left[ \frac{1}{2} (e^{2x} \cosh(e^{2x}) - \sinh(e^{2x})) \right]$$

$$\int \left( \frac{3x}{3x^2 + 1} - \frac{1}{x} \right) dx = \left[ \frac{1}{2} \ln(3x^2 + 1) - \ln|x| \right]$$

$$\int_1^{+\infty} \left( \frac{3x}{3x^2 + 1} - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

**Aufgabe 4** (4 Punkte)



Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  die Abbildung, die definiert ist durch

$$f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 - 2x + 2y.$$

(a) Berechnen Sie  $\text{grad } f(x, y)$ :  $\begin{pmatrix} 2x - y - 2 \\ 4y - x + 2 \end{pmatrix}$

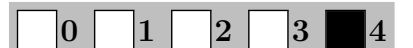
(b) Finden Sie alle kritischen Stellen von  $f$ .  $\left(\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}\right)$

(c) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix von  $f$ .  $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

(d) Bestimmen Sie für jede kritische Stelle den Typ des entsprechenden kritischen Punktes.

lokales Minimum

**Aufgabe 5** (4 Punkte)



Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den

Entwicklungspunkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  und den Konvergenzradius  $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ .

	$\sum_{k=1}^{\infty} 9^{k+1}(z+5)^k$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{k^2+1}(\sqrt{2}z+5)^k$	$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(z-5)^{2k}}{k!}$
$z_0$	-5	$-\frac{5}{\sqrt{2}}$	5
$\rho$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{5\sqrt{2}}$	$+\infty$



**Aufgabe 6** (5 Punkte)

0  1  2  3  4  5

Gegeben seien die folgenden Abbildungen:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto -2x^2 + 4xy - 2y^2 \quad g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto 4x^2 + y^2 - 4$$

(a) Geben Sie die drei Gleichungen (in  $x$ ,  $y$  und  $\lambda$ ) an, die die Bedingungen von Lagrange für lokale Extrema von  $f$  unter der Nebenbedingung  $g(x, y) = 0$  beschreiben.

$$\begin{aligned} -4x + 4y + 8\lambda x &= 0 \\ 4x - 4y + 2\lambda y &= 0 \\ 4x^2 + y^2 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

(b) Finden Sie alle  $(x, y)$  so, dass  $(x, y, \lambda)$  eine Lösung dieses Gleichungssystems ist (für ein  $\lambda \in \mathbb{R}$ ).

$$\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$$

**Aufgabe 7** (3 Punkte)

0  1  2  3

Berechnen Sie:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 - 6x + 1}{3x^2(4x - 7)}$	$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{5 \ln(k) \ln(k-1)} \ln\left(\frac{k}{k-1}\right)$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \sin(\frac{x\pi}{6}) - 1}{x^2 + x - 2}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5 \ln(2)}$	$\frac{\pi}{18} \sqrt{3}$

**Aufgabe 8** (3 Punkte)

0  1  2  3

Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$  ein Parameter. Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die stetige Funktion mit

$$f(x) = (x - 3)|x^2 - 25|(\alpha + 3).$$

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte für  $x_0 = 5$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -20(\alpha + 3) \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 20(\alpha + 3)$$

Für welche  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist  $f$  differenzierbar in  $\mathbb{R}$ ?

$\alpha = -3$

1  2  3  4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	$x^a$	$e^x$	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a x^{a-1}$	$e^x$	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
$f(x)$	$b^x$	$\ln x $	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b) b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

$x$	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

**Aufgabe 1** (1 Punkt)

0  1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Matrikelnummer:

Gruppe:

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

Name, Vorname:

Matrikelnummer:



**Aufgabe 2** (4 Punkte)



Gegeben seien die Funktionen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die durch

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 5} \quad \text{und} \quad g(x) = e^x(7 \sin(x) - \cos(x))$$

definiert sind. Bestimmen Sie die folgenden Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 + 15)}{(x^2 + 5)^2} \quad g'(x) = e^x(8 \sin(x) + 6 \cos(x))$$

Sei jetzt  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die durch  $H(x) := f(g(x))$  definierte Funktion. Berechnen Sie den Wert, den die Ableitung von  $H$  an der Stelle  $x = 0$  annimmt:

$$H'(0) = \frac{8}{3}$$

Geben Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion  $H$  an der Stelle  $x = 0$  an:

$$y = -\frac{1}{6} + \frac{8}{3}x$$

**Aufgabe 3** (7 Punkte)



Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int_1^2 5x \, dx = \frac{15}{2}$$

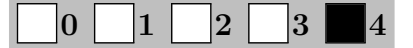
$$\int \frac{2}{(x-2)^2 + 1} \, dx = [2 \arctan(x-2)]$$

$$\int e^{6x} \sinh(e^{3x}) \, dx = \left[ \frac{1}{3} (e^{3x} \cosh(e^{3x}) - \sinh(e^{3x})) \right]$$

$$\int \left( \frac{2x}{2x^2 + 1} - \frac{1}{x} \right) dx = \left[ \frac{1}{2} \ln(2x^2 + 1) - \ln|x| \right]$$

$$\int_1^{+\infty} \left( \frac{2x}{2x^2 + 1} - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

**Aufgabe 4** (4 Punkte)



Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  die Abbildung, die definiert ist durch

$$f(x, y) = -x^2 + xy - y^2 - 3x + 2y.$$

(a) Berechnen Sie  $\text{grad } f(x, y)$ :  $\begin{pmatrix} -2x + y - 3 \\ -2y + x + 2 \end{pmatrix}$

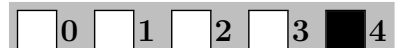
(b) Finden Sie alle kritischen Stellen von  $f$ .  $\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$

(c) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix von  $f$ .  $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

(d) Bestimmen Sie für jede kritische Stelle den Typ des entsprechenden kritischen Punktes.

lokales Maximum

**Aufgabe 5** (4 Punkte)



Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den

Entwicklungspunkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  und den Konvergenzradius  $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ .

	$\sum_{k=1}^{\infty} 11^{k+1}(z+4)^k$	$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(z-4)^{2k}}{k!}$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{9^k}{k^2+1} (\sqrt{2}z+9)^k$
$z_0$	-4	4	$-\frac{9}{\sqrt{2}}$
$\rho$	$\frac{1}{11}$	$+\infty$	$\frac{1}{9\sqrt{2}}$