



**Aufgabe 7** (6 Punkte)

0  1  2  3  4  5  6

Gegeben ist der Vektorraum  $\mathbb{C}^2$  über  $\mathbb{C}$  mit den Basen

$$E: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } B: \begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } C: \begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die folgenden Matrizen:

$${}_E \text{id}_B = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad {}_C \text{id}_E = \begin{pmatrix} i & -2 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad {}_C \text{id}_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}.$$

(b) Die lineare Abbildung  $\alpha: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2: v \mapsto Av$  soll die folgenden Bedingungen erfüllen

$$\alpha \left( \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \left( \begin{pmatrix} -2 \\ -i \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die folgenden Matrizen:

$${}_C \alpha_C = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad {}_E \alpha_C = \begin{pmatrix} -1 & 2i \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad {}_E \alpha_E = \begin{pmatrix} -i & 4 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 8** (6 Punkte)

0  1  2  3  4  5  6

Gegeben seien das Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

und die Gerade  $g$  durch die Gleichung  $x_2 = 2x_1 + 1$  (in Standardkoordinaten).

(a) Bestimmen Sie die Koordinatentransformationen.

$${}_{\mathbb{E}} \kappa_{\mathbb{F}} \left( {}_{\mathbb{F}} v \right) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} {}_{\mathbb{F}} v + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad {}_{\mathbb{F}} \kappa_{\mathbb{E}} \left( {}_{\mathbb{E}} v \right) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} {}_{\mathbb{E}} v - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie die Abbildungen  ${}_{\mathbb{F}} \beta_{\mathbb{F}}$  und  ${}_{\mathbb{E}} \beta_{\mathbb{E}}$ , wobei  $\beta$  die Spiegelung an der Geraden  $g$  bezeichnet.

$${}_{\mathbb{F}} \beta_{\mathbb{F}} \left( {}_{\mathbb{F}} v \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} {}_{\mathbb{F}} v, \quad {}_{\mathbb{E}} \beta_{\mathbb{E}} \left( {}_{\mathbb{E}} v \right) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} {}_{\mathbb{E}} v - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

1  2  3  4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

**Aufgabe 1** (1 Punkt)

0  1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

**Matrikelnummer:**

**Gruppe:**

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

**Name, Vorname:**

**Matrikelnummer:**



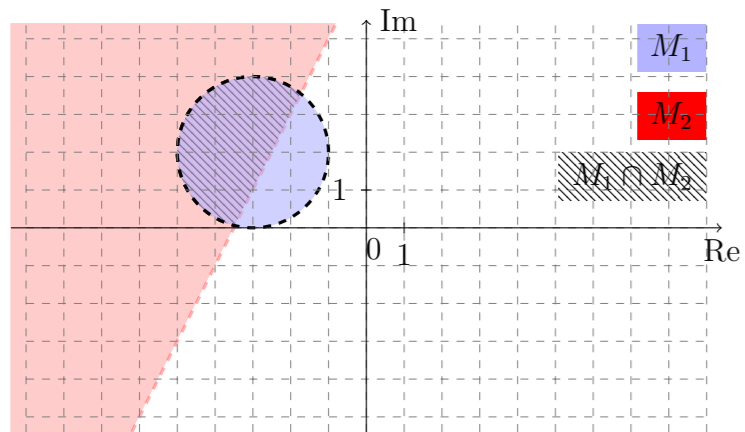
**Aufgabe 2** (4 Punkte)

0  1  2  3  4

Skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 3 - 2i| < 2\}, \quad M_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 6| < |z + 2 + 2i|\}, \quad M_1 \cap M_2$$

in der komplexen Zahlenebene.



Der Rand von  $M_1$ ,  $M_2$  und  $M_1 \cap M_2$  gehört nicht dazu.

**Aufgabe 3** (2 Punkte)

0  1  2

Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3: v \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & -6 & 2 \end{pmatrix} v.$$

Bestimmen Sie  $\dim(\text{Kern}(\varphi))$  und eine Basis  $B$  von  $\text{Kern}(\varphi)$ .

$\dim(\text{Kern}(\varphi)) =$

,  $B:$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 4** (4 Punkte)

0  1  2  3  4

Gegeben sei die Matrix  $A \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 1-i & 2i & 0 & 1+i \\ 0 & 2-i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1+i & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Ergebnisse in der Form  $a + bi$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  an.

(a) Geben Sie die Determinante und die Spur von  $A$  an.

$\det(A) =$

,  $\text{Sp}(A) =$

(b) Bestimmen Sie den betragsmäßig größten Eigenwert  $\lambda_{\max}$  von  $A$  und  $\mu_{\max}$  von  $A^2$ .

$\lambda_{\max} =$

,  $\mu_{\max} =$

+1000/2/59+

**Aufgabe 5** (2 Punkte)

0  1  2

Seien  $v = \frac{1}{3}(2, 1, 2)^T$  und  $w = \frac{1}{3}(1, 2, -2)^T$  Vektoren aus  $\mathbb{R}^3$ .

(a) Bestimmen Sie  $u \in \mathbb{R}^3$  derart, dass  $R: u, v, w$  ein Rechtssystem ist.

$$u = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) Sei  $A = (u, v, w)$ . Bestimmen Sie:  $\det(\sqrt{2}A) =$  .

**Aufgabe 6** (6 Punkte)

0  1  2  3  4  5  6

Gegeben seien bezüglich des Standardkoordinatensystems  $\mathbb{E}$  die Quadrik

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -4x_1x_2 + 8x_1 - 4x_2 + 8 = 0\}$$

und das Koordinatensystem  $\mathbb{G} = \left( P; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ .

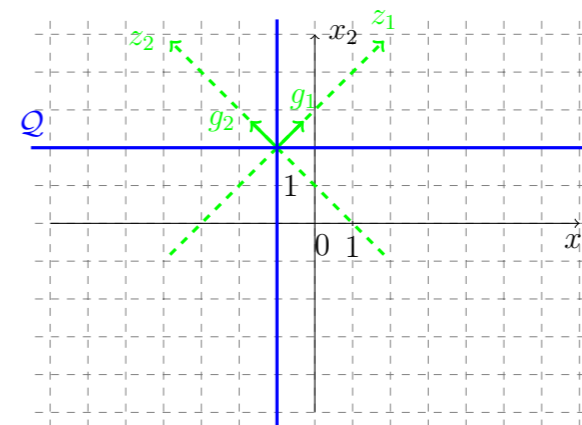
(a) Bestimmen Sie den Ursprung  $P$  des Koordinatensystems  $\mathbb{G}$  so, dass die Quadrikgleichung in Koordinaten bezüglich  $\mathbb{G}$  euklidische Normalform hat.

$$\mathbb{G} = \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

(b) Geben Sie die euklidische Normalform der Quadrikgleichung in Koordinaten bezüglich  $\mathbb{G}$  an. Skizzieren Sie das Koordinatensystem  $\mathbb{G}$  sowie die Quadrik im Standardkoordinatensystem.

euklidische Normalform:

$Q:$



(c) Bestimmen Sie die Koordinatentransformationen.

$$\mathbb{E}^{\kappa_{\mathbb{G}}}(\mathbb{G}v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{\mathbb{G}} v + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{G}^{\kappa_{\mathbb{E}}}(\mathbb{E}v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{\mathbb{E}} v - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

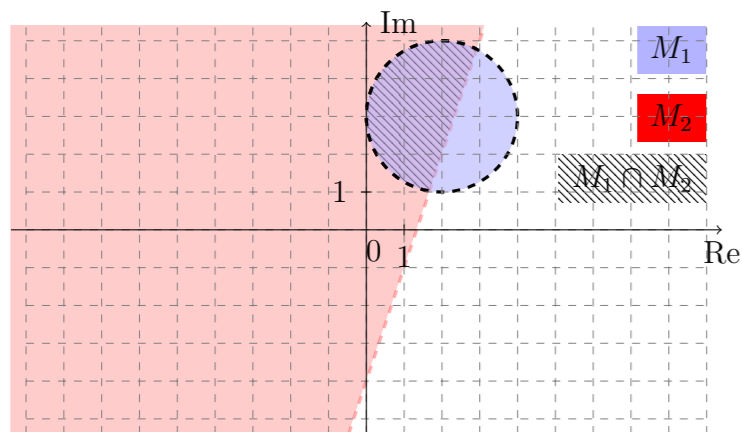


**Aufgabe 2** (4 Punkte) 0  1  2  3  4

Skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2 - 3i| < 2\}, \quad M_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 4 + 2i| > |z + 2|\}, \quad M_1 \cap M_2$$

in der komplexen Zahlenebene.



Der Rand von  $M_1$ ,  $M_2$  und  $M_1 \cap M_2$  gehört nicht dazu.

**Aufgabe 3** (2 Punkte) 0  1  2

Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3: v \mapsto \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} v.$$

Bestimmen Sie  $\dim(\text{Kern}(\varphi))$  und eine Basis  $B$  von  $\text{Kern}(\varphi)$ .

$$B: \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right), \quad \dim(\text{Kern}(\varphi)) = 2$$

**Aufgabe 4** (4 Punkte) 0  1  2  3  4Gegeben sei die Matrix  $A \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 3+i & 2i & 0 & 1+i \\ 0 & 1-2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1+i & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Ergebnisse in der Form  $a + bi$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  an.(a) Geben Sie die Spur und die Determinante von  $A$  an.

$$\text{Sp}(A) = 8 - i, \quad \det(A) = 15 - 15i$$

(b) Bestimmen Sie den betragsmäßig größten Eigenwert  $\lambda_{\max}$  von  $A$  und  $\mu_{\max}$  von  $A^2$ .

$$\lambda_{\max} = 3 + i, \quad \mu_{\max} = 8 + 6i$$

+2000/2/57+

**Aufgabe 5** (2 Punkte) 0  1  2Seien  $v = \frac{1}{3}(2, 2, 1)^T$  und  $w = \frac{1}{3}(1, -2, 2)^T$  Vektoren aus  $\mathbb{R}^3$ .(a) Bestimmen Sie  $u \in \mathbb{R}^3$  derart, dass  $R: u, v, w$  ein Rechtssystem ist.

$$u = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(b) Sei  $A = (u, v, w)$ . Bestimmen Sie:  $\det(\sqrt{3}A) = 3\sqrt{3}$ .**Aufgabe 6** (6 Punkte) 0  1  2  3  4  5  6Gegeben seien bezüglich des Standardkoordinatensystems  $\mathbb{E}$  die Quadrik

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -4x_1x_2 - 8x_1 - 4x_2 - 8 = 0\}$$

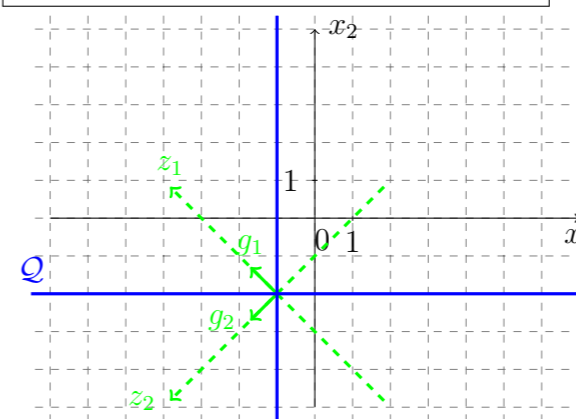
und das Koordinatensystem  $\mathbb{G} = \left( P; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ .(a) Bestimmen Sie den Ursprung  $P$  des Koordinatensystems  $\mathbb{G}$  so, dass die Quadrikgleichung in Koordinaten bezüglich  $\mathbb{G}$  euklidische Normalform hat.

$$\mathbb{G} = \left( \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

(b) Geben Sie die euklidische Normalform der Quadrikgleichung in Koordinaten bezüglich  $\mathbb{G}$  an. Skizzieren Sie das Koordinatensystem  $\mathbb{G}$  sowie die Quadrik im Standardkoordinatensystem.

euklidische Normalform:

$$Q: 2z_1^2 - 2z_2^2 = 0$$



(c) Bestimmen Sie die Koordinatentransformationen.

$$\mathbb{E}^{\kappa_{\mathbb{G}}}(\mathbb{G}v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbb{G}v + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{G}^{\kappa_{\mathbb{E}}}(\mathbb{E}v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbb{E}v - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$



**Aufgabe 7** (6 Punkte)

0  1  2  3  4  5  6

Gegeben ist der Vektorraum  $\mathbb{C}^2$  über  $\mathbb{C}$  mit den Basen

$$E: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } B: \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ i \end{pmatrix} \text{ und } C: \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die folgenden Matrizen:

$${}_E \text{id}_B = \begin{pmatrix} i & -2 \\ 1 & i \end{pmatrix}, \quad {}_C \text{id}_E = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix}, \quad {}_C \text{id}_B = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Die lineare Abbildung  $\alpha: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2: v \mapsto Av$  soll die folgenden Bedingungen erfüllen

$$\alpha \left( \begin{pmatrix} -i \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \alpha \left( \begin{pmatrix} 0 \\ -i \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die folgenden Matrizen:

$${}_C \alpha_C = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix}, \quad {}_E \alpha_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i & -2 \end{pmatrix}, \quad {}_E \alpha_E = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ -3 & 2i \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 8** (6 Punkte)

0  1  2  3  4  5  6

Gegeben seien das Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left( \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

und die Gerade  $g$  durch die Gleichung  $x_2 = 2x_1 - 1$  (in Standardkoordinaten).

(a) Bestimmen Sie die Koordinatentransformationen.

$${}_{\mathbb{E}} \kappa_{\mathbb{F}} \left( {}_{\mathbb{F}} v \right) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} {}_{\mathbb{F}} v + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad {}_{\mathbb{F}} \kappa_{\mathbb{E}} \left( {}_{\mathbb{E}} v \right) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} {}_{\mathbb{E}} v - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie die Abbildungen  ${}_{\mathbb{F}} \beta_{\mathbb{F}}$  und  ${}_{\mathbb{E}} \beta_{\mathbb{E}}$ , wobei  $\beta$  die Spiegelung an der Geraden  $g$  bezeichnet.

$${}_{\mathbb{F}} \beta_{\mathbb{F}} \left( {}_{\mathbb{F}} v \right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} {}_{\mathbb{F}} v, \quad {}_{\mathbb{E}} \beta_{\mathbb{E}} \left( {}_{\mathbb{E}} v \right) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} {}_{\mathbb{E}} v + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

1  2  3  4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

**Aufgabe 1** (1 Punkt)

0  1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

**Matrikelnummer:**

**Gruppe:**

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

**Name, Vorname:**

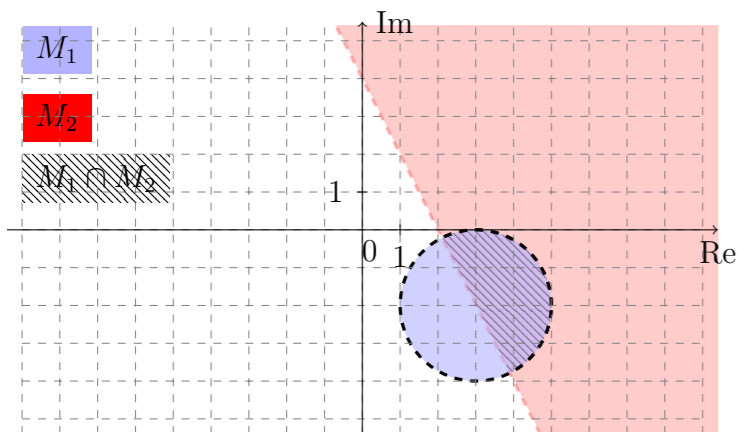
**Matrikelnummer:**

**Aufgabe 2** (4 Punkte) 0  1  2  3  4

Skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 3 + 2i| < 2\}, \quad M_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 5 - 4i| < |z + 3|\}, \quad M_1 \cap M_2$$

in der komplexen Zahlenebene.



Der Rand von  $M_1$ ,  $M_2$  und  $M_1 \cap M_2$  gehört nicht dazu.

**Aufgabe 3** (2 Punkte) 0  1  2

Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3: v \mapsto \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & -2 & 6 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} v.$$

Bestimmen Sie  $\dim(\text{Kern}(\varphi))$  und eine Basis  $B$  von  $\text{Kern}(\varphi)$ .

$$\dim(\text{Kern}(\varphi)) = \boxed{2}, \quad B:$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

**Aufgabe 4** (4 Punkte) 0  1  2  3  4

Gegeben sei die Matrix  $A \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 1+2i & 2i & 0 & 1+i \\ 0 & 1-i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1+i & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Ergebnisse in der Form  $a + bi$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  an.(a) Geben Sie die Determinante und die Spur von  $A$  an.

$$\det(A) = \boxed{-6 - 2i}, \quad \text{Sp}(A) = \boxed{1 + i}$$

(b) Bestimmen Sie den betragsmäßig größten Eigenwert  $\lambda_{\max}$  von  $A$  und  $\mu_{\max}$  von  $A^2$ .

$$\lambda_{\max} = \boxed{1 + 2i}, \quad \mu_{\max} = \boxed{-3 + 4i}$$

+3000/2/55+

**Aufgabe 5** (2 Punkte) 0  1  2Seien  $v = \frac{1}{3}(1, 2, 2)^T$  und  $w = \frac{1}{3}(2, 1, -2)^T$  Vektoren aus  $\mathbb{R}^3$ .(a) Bestimmen Sie  $u \in \mathbb{R}^3$  derart, dass  $R: u, v, w$  ein Rechtssystem ist.

$$u = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(b) Sei  $A = (u, v, w)$ . Bestimmen Sie:  $\det(-\sqrt{2}A) = \boxed{-2\sqrt{2}}$ .**Aufgabe 6** (6 Punkte) 0  1  2  3  4  5  6Gegeben seien bezüglich des Standardkoordinatensystems  $\mathbb{E}$  die Quadrik

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -2x_1x_2 + 2x_1 + 4x_2 - 4 = 0\}$$

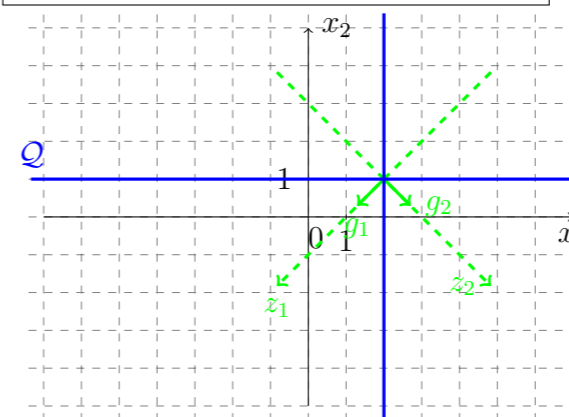
und das Koordinatensystem  $\mathbb{G} = \left( P; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ .(a) Bestimmen Sie den Ursprung  $P$  des Koordinatensystems  $\mathbb{G}$  so, dass die Quadrikgleichung in Koordinaten bezüglich  $\mathbb{G}$  euklidische Normalform hat.

$$\mathbb{G} = \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

(b) Geben Sie die euklidische Normalform der Quadrikgleichung in Koordinaten bezüglich  $\mathbb{G}$  an. Skizzieren Sie das Koordinatensystem  $\mathbb{G}$  sowie die Quadrik im Standardkoordinatensystem.

euklidische Normalform:

$$Q: \quad \boxed{-z_1^2 + z_2^2 = 0}$$



(c) Bestimmen Sie die Koordinatentransformationen.

$$\mathbb{E}^{\kappa_{\mathbb{G}}}(\mathbb{G}v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbb{G}v + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{G}^{\kappa_{\mathbb{E}}}(\mathbb{E}v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbb{E}v - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$



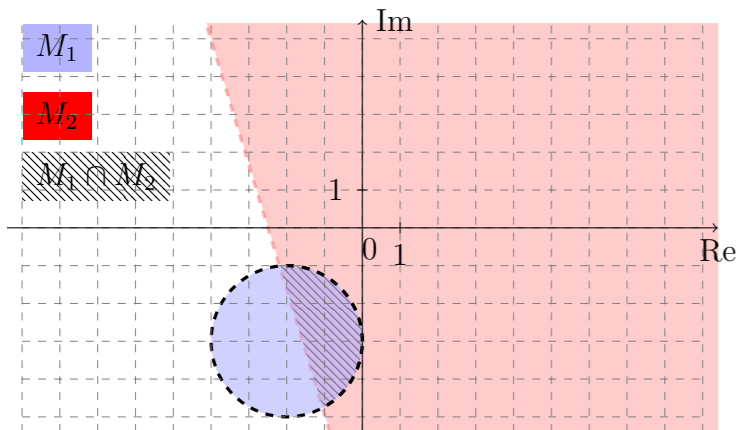


**Aufgabe 2** (4 Punkte)

Skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 2 + 3i| < 2\}, \quad M_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 4 + i| > |z + 1|\}, \quad M_1 \cap M_2$$

in der komplexen Zahlenebene.



Der Rand von  $M_1$ ,  $M_2$  und  $M_1 \cap M_2$  gehört nicht dazu.

0  1  2  3  4

**Aufgabe 3** (2 Punkte)

Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3: v \mapsto \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} v.$$

Bestimmen Sie  $\dim(\text{Kern}(\varphi))$  und eine Basis  $B$  von  $\text{Kern}(\varphi)$ .

$B: \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \dim(\text{Kern}(\varphi)) = 2$

0  1  2

**Aufgabe 4** (4 Punkte)

Gegeben sei die Matrix  $A \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 2i & 0 & 1+i \\ 0 & 1-3i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1+i & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Ergebnisse in der Form  $a + bi$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  an.

(a) Geben Sie die Spur und die Determinante von  $A$  an.

$\text{Sp}(A) = -2 - 2i, \quad \det(A) = 12 - 6i$

(b) Bestimmen Sie den betragsmäßig größten Eigenwert  $\lambda_{\max}$  von  $A$  und  $\mu_{\max}$  von  $A^2$ .

$\lambda_{\max} = 1 - 3i, \quad \mu_{\max} = -8 - 6i$

0  1  2  3  4

+4000/2/53+

**Aufgabe 5** (2 Punkte)

Seien  $v = \frac{1}{3}(2, 1, 2)^T$  und  $w = \frac{1}{3}(-2, 2, 1)^T$  Vektoren aus  $\mathbb{R}^3$ .

(a) Bestimmen Sie  $u \in \mathbb{R}^3$  derart, dass  $R: u, v, w$  ein Rechtssystem ist.

$u = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) Sei  $A = (u, v, w)$ . Bestimmen Sie:  $\det(-\sqrt{3}A) = -3\sqrt{3}$ .

0  1  2

**Aufgabe 6** (6 Punkte)

Gegeben seien bezüglich des Standardkoordinatensystems  $\mathbb{E}$  die Quadrik

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -2x_1x_2 - 2x_1 + 4x_2 + 4 = 0\}$$

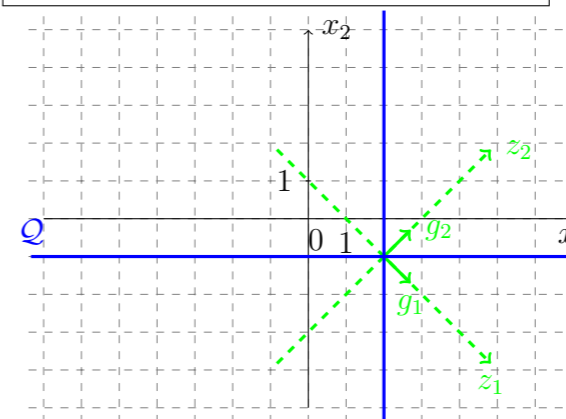
und das Koordinatensystem  $\mathbb{G} = \left( P; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ .

(a) Bestimmen Sie den Ursprung  $P$  des Koordinatensystems  $\mathbb{G}$  so, dass die Quadrikgleichung in Koordinaten bezüglich  $\mathbb{G}$  euklidische Normalform hat.

$\mathbb{G} = \left( \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

(b) Geben Sie die euklidische Normalform der Quadrikgleichung in Koordinaten bezüglich  $\mathbb{G}$  an. Skizzieren Sie das Koordinatensystem  $\mathbb{G}$  sowie die Quadrik im Standardkoordinatensystem.

euklidische Normalform:  
 $Q: z_1^2 - z_2^2 = 0$



(c) Bestimmen Sie die Koordinatentransformationen.

$\mathbb{E}^{\kappa_{\mathbb{G}}}(G^v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{\mathbb{G}} v + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad G^{\kappa_{\mathbb{E}}}(\mathbb{E}^v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{\mathbb{E}} v - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

0  1  2  3  4  5  6