Aufgabe 7 (5 Punkte)

0 1 2 3 4 5

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Abbildung, die gegeben ist durch

$$f(x,y) = \sin(2xy) + \cos(-xy).$$

(a) Bestimmen Sie den Gradient von f: $\nabla f(x,y) = \boxed{\begin{pmatrix} 2y\cos(2xy) + y\sin(-xy) \\ 2x\cos(2xy) + x\sin(-xy) \end{pmatrix}}$

(b) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix von f an $(1,0)$: $Hf(1,0) = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}$

(c) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_2(f,(x,y),(1,0))$:

$$\boxed{1} + \boxed{0} \cdot (x-1) + \boxed{2} \cdot y + \boxed{0} \cdot (x-1)^2 + \boxed{2} \cdot (x-1)y + \boxed{-\frac{1}{2}} \cdot y^2.$$

Aufgabe 8 (5 Punkte)

0 1 2 3 4 5

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int_1^2 7x \,\mathrm{d}\,x = \boxed{\frac{21}{2}}$$

$$\int 6x^3\cos(x^2)\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[3\left(\cos(x^2) + x^2\sin(x^2)\right)\right]}$$

$$\int \frac{4}{(2x-2)^2+1}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[2\arctan(2x-2)\right]}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{4}{(2x-2)^2+1}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\pi + 2\arctan(2)}$$

1 2 3 4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt)

0 1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9

Gruppe:

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Aufgabe 2 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Abbildung

$$f(x,y) = \sin(x)\cos(y).$$

(a) Welcher der folgenden Kandidaten ist eine kritische Stelle von f?

☐ $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ ☒ $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

(b) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix von f und den Typ der in **(a)** gefundenen kritischen Stelle.

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(x)\cos(y) & -\cos(x)\sin(y) \\ -\cos(x)\sin(y) & -\sin(x)\cos(y) \end{pmatrix}$$

Typ: lokales Minimum

Aufgabe 3 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum_{k=1}^{\infty}(-1+3\mathrm{i})^k(z+\sqrt{3})^k$	$\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{i}^k\left(\frac{z-3\mathrm{i}}{k^2}\right)^k$	$\sum_{k=3}^{\infty}\left(3+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)\right)^k(z-2+\mathrm{i})^k$
z_0	$-\sqrt{3}$	$3\mathrm{i}$	$2-\mathrm{i}$
ρ	$\frac{1}{\sqrt{10}}$	$+\infty$	$\frac{1}{\sqrt{10}}$

Aufgabe 4 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Bestimmen Sie die fehlenden Koeffizienten durch Polynomdivision:

$$\frac{2x^4-3x^3+10x^2-11x+8}{x^3-x^2+2x-2} = \boxed{2}\cdot x + \boxed{-1} + \frac{5x^2-5x+6}{x^3-x^2+2x-2}$$

Führen Sie eine reelle Partialbruchzerlegung durch:

$$\frac{5x^2-5x+6}{x^3-x^2+2x-2} = \boxed{\frac{3x-2}{x^2+2} + \frac{2}{x-1}}$$

Aufgabe 5 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Berechnen Sie:

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cos(x)}{3x+\sin(x)}+18\right)$	$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos(x)-2x}{3x+\sin(x)}$	$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\pi^{k+1}}{2^{k-1}k!}$
18	$-\frac{2}{3}$	$2\pi e^{\frac{\pi}{2}}$

Aufgabe 6 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Für Konstanten $a,b \in \mathbb{R}$ sind die Parametrisierungen

$$C_{a,b} : [0,1] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} 2t-b \\ at^2-4bt+1 \end{pmatrix} \text{ einer von } a,b \text{ abhängigen Kurve } K_{a,b} \text{ und}$$

$$D : [-1,1] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} t^3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ einer Kurve } M$$

gegeben. Wir betrachten das folgende Vektorfeld:

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -6x_1^2+4x_1x_2 \\ 2x_1^2-2x_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Konstanten a,b so, dass $C_{a,b}$ eine Kurve von $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ parametrisiert.

$a = \boxed{4}$ $b = \boxed{1}$

(b) Bestimmen Sie die Länge der Kurve M. $\boxed{2}$

(c) Bestimmen Sie ein Potential U für das Vektorfeld g.

$$U(x_1,x_2) = \boxed{-2x_1^3+2x_1^2x_2-x_2^2}$$

(d) Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale.

$$\int_{K_{4,1}} g(x) \bullet \mathrm{d}\,x = \boxed{-4}$$

$$\int_{M} g(x) \bullet \mathrm{d}\,x = \boxed{-4}$$