

0 1 2

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$.

Bestimmen Sie eine Matrix $D \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ so, dass $A \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $d_{11} = d_{12} = 1$.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (3 Punkte)

0 1 2 3

Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 12 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie

$$\det(A) = -1 + i, \det(B) = 6, \det(C) = -16.$$

Aufgabe 4 (5 Punkte)

0 1 2 3 4 5

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$$

(b) Bestimmen Sie eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ so, dass $S^{-1}BS$ Diagonalgestalt hat.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix B^5 .

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 32$$

Aufgabe 5 (4 Punkte)

0 1 2 3 4

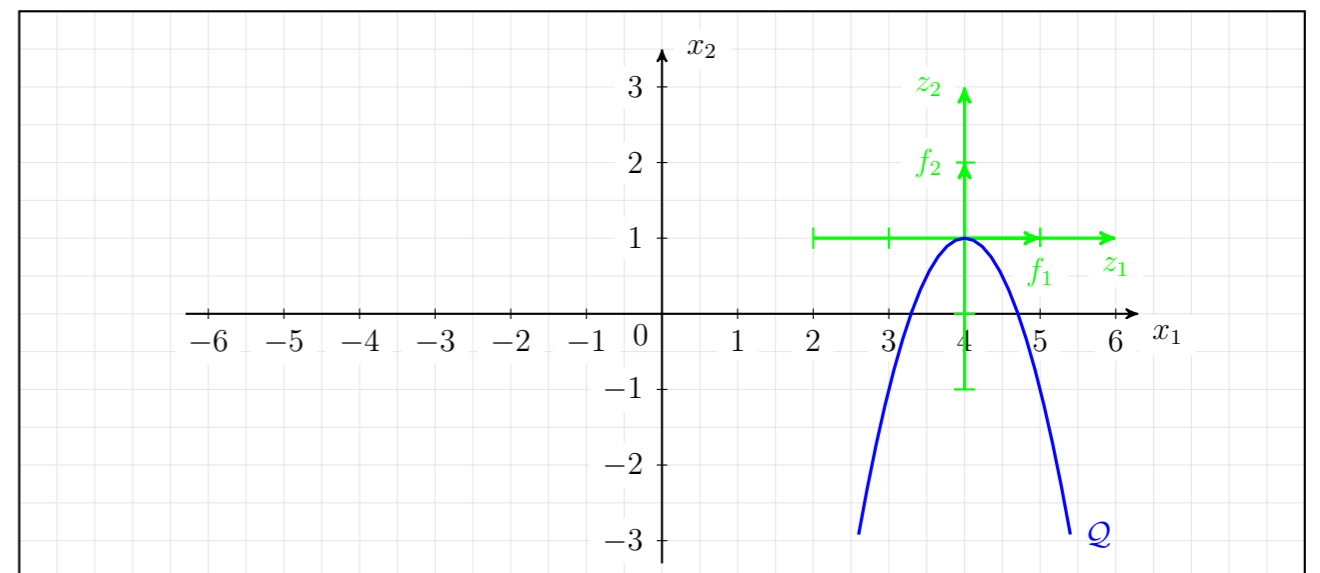
Gegeben ist bezüglich des Standardkoordinatensystems \mathbb{E} die Quadrik

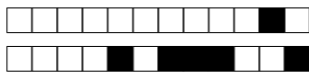
$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1^2 - 16x_1 + x_2 + 31 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie ein kartesisches Koordinatensystem \mathbb{F} , in dem die Gleichung der Quadrik euklidische Normalform hat. Geben Sie diese Normalform sowie F und t für die Koordinatentransformation $\kappa_{\mathbb{F}}: \mathbb{F} v \mapsto F_{\mathbb{F}} v + t$ an. Skizzieren Sie das Koordinatensystem \mathbb{F} sowie die Quadrik im Standardkoordinatensystem.

Euklidische Normalform:

$$Q: 4z_1^2 + 2z_2 = 0, F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, t = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$





0 1 2

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$.

Bestimmen Sie eine Matrix $D \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ so, dass $A \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $d_{11} = d_{12} = 1$.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (3 Punkte)

0 1 2 3

Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} i & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 13 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie

$$\det(A) = \boxed{1 + i}, \det(B) = \boxed{-6}, \det(C) = \boxed{5}.$$

Aufgabe 4 (5 Punkte)

0 1 2 3 4 5

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$$

(b) Bestimmen Sie eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ so, dass $S^{-1}BS$ Diagonalgestalt hat.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix B^5 .

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 32$$

Aufgabe 5 (4 Punkte)

0 1 2 3 4

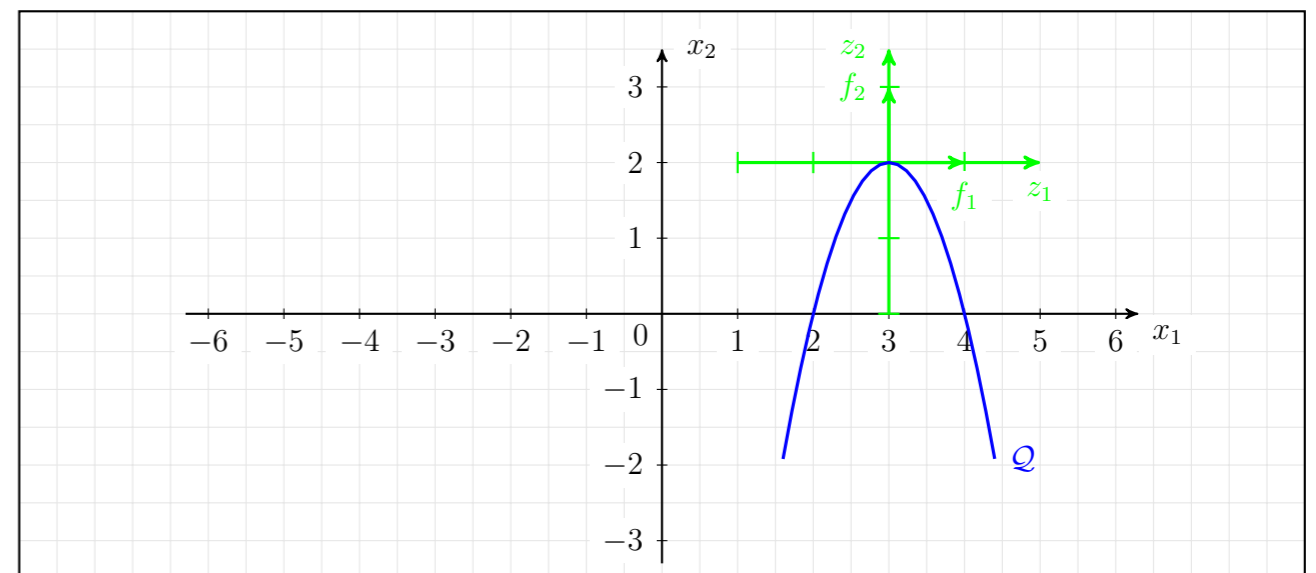
Gegeben ist bezüglich des Standardkoordinatensystems \mathbb{E} die Quadrik

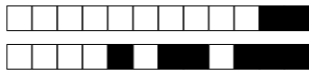
$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1^2 - 12x_1 + x_2 + 16 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie ein kartesisches Koordinatensystem \mathbb{F} , in dem die Gleichung der Quadrik euklidische Normalform hat. Geben Sie diese Normalform sowie F und t für die Koordinatentransformation $\kappa_{\mathbb{F}}: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{E}$ an. Skizzieren Sie das Koordinatensystem \mathbb{F} sowie die Quadrik im Standardkoordinatensystem.

Euklidische Normalform:

$$Q: \boxed{4z_1^2 + 2z_2 = 0}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$





0 1 2

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$.

Bestimmen Sie eine Matrix $D \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ so, dass $A \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $d_{31} = d_{32} = 1$.

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (3 Punkte)

0 1 2 3

Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} i & i \\ 1 & i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 14 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie

$$\det(A) = -1 - i, \quad \det(B) = 8, \quad \det(C) = -27.$$

Aufgabe 4 (5 Punkte)

0 1 2 3 4 5

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$$

(b) Bestimmen Sie eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ so, dass $S^{-1}BS$ Diagonalgestalt hat.

$$S = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix B^5 .

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -32$$

Aufgabe 5 (4 Punkte)

0 1 2 3 4

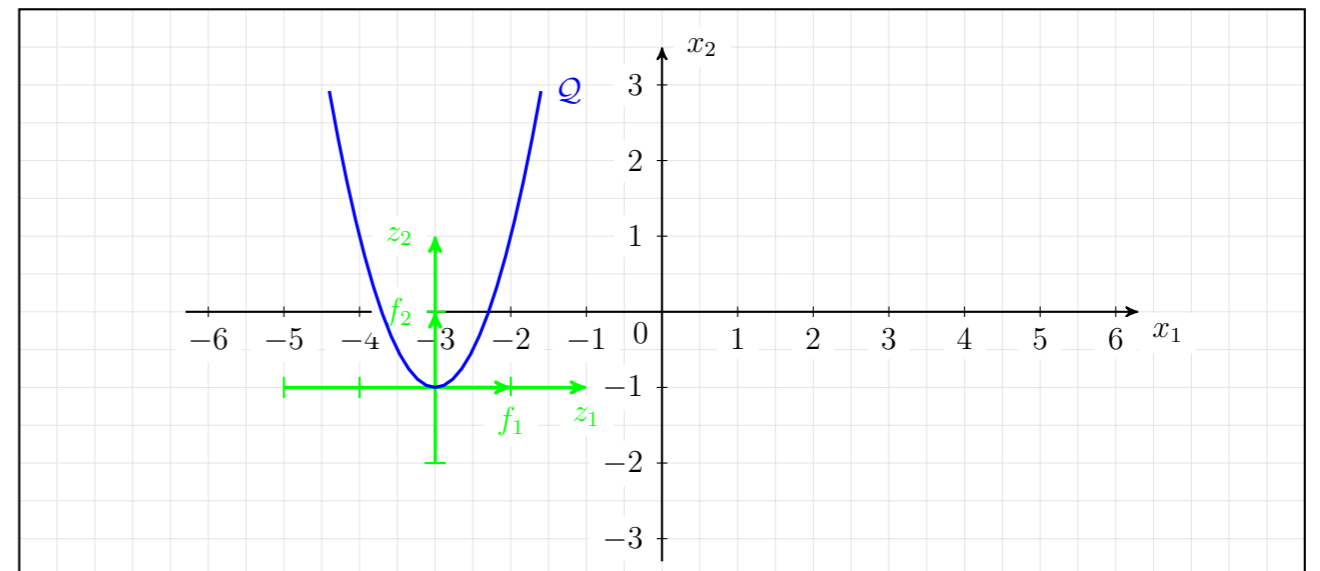
Gegeben ist bezüglich des Standardkoordinatensystems \mathbb{E} die Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid -2x_1^2 - 12x_1 + x_2 - 17 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie ein kartesisches Koordinatensystem \mathbb{F} , in dem die Gleichung der Quadrik euklidische Normalform hat. Geben Sie diese Normalform sowie F und t für die Koordinatentransformation $\kappa_{\mathbb{F}}: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{E}$ an. Skizzieren Sie das Koordinatensystem \mathbb{F} sowie die Quadrik im Standardkoordinatensystem.

Euklidische Normalform:

$$Q: -4z_1^2 + 2z_2 = 0, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$





0 1 2

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$.

Bestimmen Sie eine Matrix $D \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ so, dass $A \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $d_{31} = d_{32} = 1$.

$$D = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (3 Punkte)

0 1 2 3

Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 15 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie

$$\det(A) = 1 - i, \det(B) = -8, \det(C) = 48.$$

Aufgabe 4 (5 Punkte)

0 1 2 3 4 5

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$$

(b) Bestimmen Sie eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ so, dass $S^{-1}BS$ Diagonalgestalt hat.

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix B^5 .

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -32$$

Aufgabe 5 (4 Punkte)

0 1 2 3 4

Gegeben ist bezüglich des Standardkoordinatensystems \mathbb{E} die Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid -2x_1^2 - 12x_1 + x_2 - 16 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie ein kartesisches Koordinatensystem \mathbb{F} , in dem die Gleichung der Quadrik euklidische Normalform hat. Geben Sie diese Normalform sowie F und t für die Koordinatentransformation $\kappa_{\mathbb{F}}: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{E}$ an. Skizzieren Sie das Koordinatensystem \mathbb{F} sowie die Quadrik im Standardkoordinatensystem.

Euklidische Normalform:

$$Q: -4z_1^2 + 2z_2 = 0, F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, t = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

