Aufgabe 6 (11 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐10 ■11

Wir betrachten die Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_3 - 12 = 0\}$.

(a) Geben Sie eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, einen Vektor $a \in \mathbb{R}^3$ und ein $c \in \mathbb{R}$ so an, dass gilt $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^\intercal A x + 2a^\intercal x + c = 0\}$.

$$A = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}}, \quad a = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \quad c = \boxed{-12}$$

(b) Wie lautet das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ von A?

$$\chi_A(\lambda) = \boxed{-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 2\lambda - 8}$$

(c) Geben Sie eine Matrix D und eine orthogonale Matrix F so an, dass $D = F^\intercal A F$ Diagonalgestalt annimmt.

$$D = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}, \quad F = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}}$$

(d) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform sowie die Gestalt der Quadrik.

Normalform: $\boxed{\frac{1}{12}y_1^2 - \frac{1}{6}y_2^2 - \frac{1}{3}y_3^2 + 1 = 0}$

Gestalt: einschaliges Hyperboloid

Nachklausur — **Höhere Mathematik 1** — **08. 02. 2019**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ■1 ☐2 ☐3 ☐4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Es sei $v = \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix}^\top$ und durch die Vektoren $b_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}^\top$ und $b_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}^\top$ sei neben der Standardbasis E eine weitere Basis B des $\mathbb{R}^2$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie

$${}_E\mathrm{id}_B = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}, \quad {}_B\mathrm{id}_E = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}}, \quad {}_Bv = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{11}{5} \\ -\frac{7}{5} \end{pmatrix}}, \quad {}_E(5b_1 - 7b_2) = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ 19 \end{pmatrix}}.$$

(b) Sei $g = \{tb_1 \mid t \in \mathbb{R}\}$ und bezeichne S die Spiegelung an dieser Geraden. Bestimmen Sie die Matrixdarstellungen ${}_BS_B$ und ${}_ES_E$:

$${}_BS_B = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}, \quad {}_ES_E = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 3 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

(a) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1-n}$.

$$\boxed{\frac{1}{\mathrm{e}}}$$

(b) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \left(\frac{6 - \frac{5}{n}}{3 + \frac{9}{n}}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} n\right)$.

$$\boxed{-2, \quad 0, \quad 2}$$

(c) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $c_0 = 0$ und $c_n = c_{n-1}^2 + \frac{1}{4}$ für $n \geqq 1$.

$$\boxed{\frac{1}{2}}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

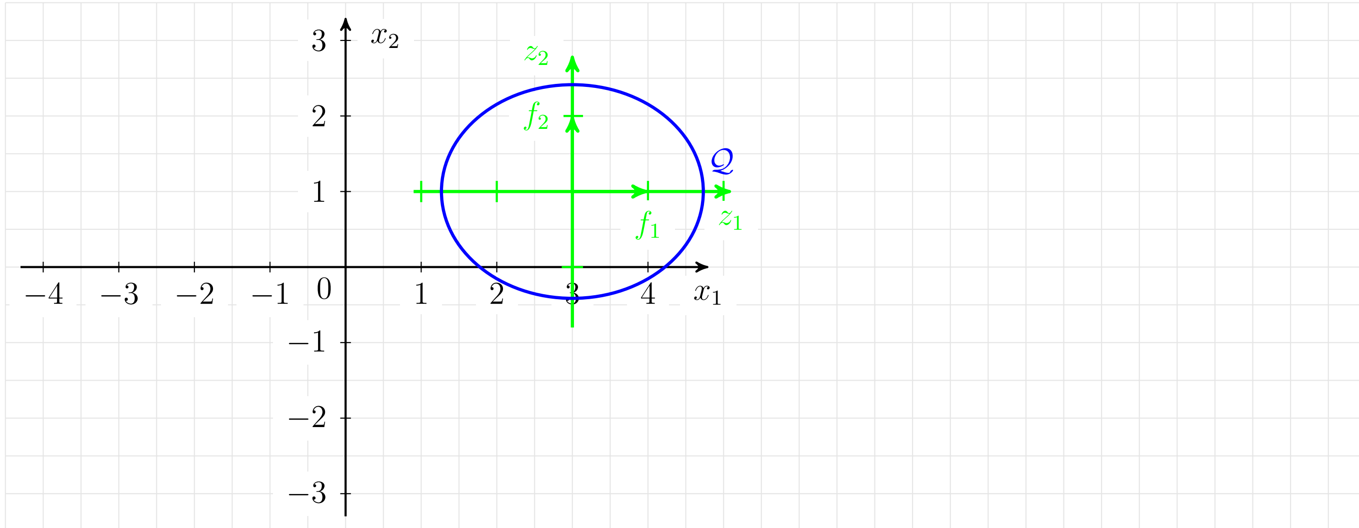
Gegeben ist bezüglich des Standardkoordinatensystems $\mathbb{E}$ die Quadrik

$$\mathcal{Q} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2x_1^2 + 3x_2^2 - 12x_1 - 6x_2 + 15 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$, in dem die Gleichung der Quadrik euklidische Normalform hat. Geben Sie diese Normalform sowie F und t für die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon {}_{\mathbb{F}}v \mapsto F\,{}_{\mathbb{F}}v + t$ an. Skizzieren Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ sowie die Quadrik im Standardkoordinatensystem.

Euklidische Normalform:

$$\mathcal{Q}\colon \boxed{-\frac{1}{3}z_1^2 - \frac{1}{2}z_2^2 + 1 = 0}, \quad F = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}, \quad t = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}$$



Aufgabe 5 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Gegeben ist die Matrix $A_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

(a) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, für die die Matrix A_a invertierbar ist und berechnen Sie A_0^{-1}.

$$a \in \boxed{\mathbb{R} \setminus \{2\}}, \quad A_0^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

(b) Bestimmen Sie die Determinante und die Spur der Matrix A_0^5.

$$\det(A_0^5) = \boxed{32}, \quad \mathrm{Sp}(A_0^5) = \boxed{33}$$