**Aufgabe 6** (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 \mathrm{e}^{x-1} + \cos(2\pi x) + 2$. Bestimmen Sie die Ableitungen:

$f'(x) =$ ☐ $\qquad f''(x) =$ ☐

Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 zum Entwicklungspunkt $x_0 = 1$:

$$T_2(f, x, 1) = \boxed{\phantom{xx}} + \boxed{\phantom{xx}} \cdot (x-1) + \boxed{\phantom{xx}} \cdot (x-1)^2$$

---

**Aufgabe 7** (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

| | $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{2 \cdot 5^{k-1}} (z - 4\mathrm{i} + 3)^k$ | $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^k}{k^2} (5z - \sqrt{2})^k$ | $\sum_{k=3}^{\infty} ((3+\mathrm{i})z - 3)^k$ |
|---|---|---|---|
| $z_0$ | | | |
| $\rho$ | | | |

---

**Aufgabe 8** (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Bestimmen Sie die reelle Partialbruchzerlegung für

$$\frac{x^2 + 9x + 13}{(x+1)^2 (x+2)} = \frac{\boxed{\phantom{xx}}}{x+1} + \frac{\boxed{\phantom{xx}}}{(x+1)^2} + \frac{\boxed{\phantom{xx}}}{x+2}.$$



**Scheinklausur** **Höhere Mathematik 2** **13. 7. 2019**

☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

| $f(x)$ | $x^a$ | $\mathrm{e}^x$ | $\sin x$ | $\tan x$ | $\sinh x$ | $\operatorname{arsinh} x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$ | $a\, x^{a-1}$ | $\mathrm{e}^x$ | $\cos x$ | $\frac{1}{(\cos(x))^2}$ | $\cosh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ |
| $f(x)$ | $b^x$ | $\ln\lvert x\rvert$ | $\cos x$ | $\arctan x$ | $\cosh x$ | $\operatorname{arcosh} x$ |
| $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$ | $\ln(b)\, b^x$ | $\frac{1}{x}$ | $-\sin x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ | $\sinh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ |

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+$

| $x$ | $\sin x$ | $\cos x$ |
|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $1$ |
| $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ |
| $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ |
| $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | $1$ | $0$ |

*Viel Erfolg!*

---

**Aufgabe 1** (1 Punkt) ☐0 ☐1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

**Name, Vorname:**

**Matrikelnummer:**

**Matrikelnummer:**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐0 | ☐0 | ☐0 | ☐0 | ☐0 | ☐0 | ☐0 |
| ☐1 | ☐1 | ☐1 | ☐1 | ☐1 | ☐1 | ☐1 |
| ☐2 | ☐2 | ☐2 | ☐2 | ☐2 | ☐2 | ☐2 |
| ☐3 | ☐3 | ☐3 | ☐3 | ☐3 | ☐3 | ☐3 |
| ☐4 | ☐4 | ☐4 | ☐4 | ☐4 | ☐4 | ☐4 |
| ☐5 | ☐5 | ☐5 | ☐5 | ☐5 | ☐5 | ☐5 |
| ☐6 | ☐6 | ☐6 | ☐6 | ☐6 | ☐6 | ☐6 |
| ☐7 | ☐7 | ☐7 | ☐7 | ☐7 | ☐7 | ☐7 |
| ☐8 | ☐8 | ☐8 | ☐8 | ☐8 | ☐8 | ☐8 |
| ☐9 | ☐9 | ☐9 | ☐9 | ☐9 | ☐9 | ☐9 |

**Gruppe:**

| | |
|---|---|
| ☐0 | ☐0 |
| ☐1 | ☐1 |
| ☐2 | ☐2 |
| ☐3 | ☐3 |
| ☐4 | ☐4 |
| ☐5 | ☐5 |
| ☐6 | ☐6 |
| ☐7 | ☐7 |
| ☐8 | ☐8 |
| ☐9 | ☐9 |

**Aufgabe 2** (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Berechnen Sie:

| $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3\sqrt{x}+4x+6}{1-4\sqrt{x}+5x}$ | $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{3^k}{k!}$ | $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{5^k}{7^k}$ | $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\tan\left(\frac{x\pi}{3}\right)}{x^2-9}$ |
|---|---|---|---|
| | | | |

**Aufgabe 3** (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto (x^2-3x-9)e^x$.

**(a)** Berechnen Sie $f'(x) =$ ☐ und $f''(x) =$ ☐.

**(b)** Bestimmen Sie die kritischen Stellen von $f$ sowie deren Typ (lok. Max./lok. Min./Sattelpunkt).

| Kritische Stelle | Typ |
|---|---|
| | |

**Aufgabe 4** (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

| $\displaystyle\int \frac{-1}{x(1+\ln(x))}\,\mathrm{d}\,x$ | $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(1+\ln(x))}\,\mathrm{d}\,x$ | $\displaystyle\int 2e^x \sin(x)\,\mathrm{d}\,x$ | $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{6}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x$ |
|---|---|---|---|
| | | | |

**Aufgabe 5** (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Gegeben sind die folgenden Abbildungen.

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto 5(x-y)^2 + z(x-y) \qquad g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x^2+y^2+z^2-9$$

**(a)** Bestimmen Sie den Gradienten von $f$. $\operatorname{grad} f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$ ☐

**(b)** Geben Sie die vier Gleichungen (in $x$, $y$, $z$ und $\lambda$) an, die die Bedingungen von Lagrange für lokale Extrema von $f$ unter der Nebenbedingung $g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ beschreiben.

☐

**(c)** Gegeben ist eine weitere Abbildung

$$h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto z^2 + 2xy.$$

Wir betrachten die Abbildung $f$ unter den Nebenbedingungen $g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ und $h\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$.

Die Anwendung der Multiplikatormethode nach Lagrange ergibt die folgenden kritischen Stellen als Kandidaten für Extremalstellen.

$$P_1 = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^\intercal,\ P_2 = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^\intercal,\ P_3 = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^\intercal,\ P_4 = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^\intercal$$

Bestimmen Sie den kleinsten Wert, den $f$ unter den beiden Nebenbedingungen annimmt.

☐

**Aufgabe 6** (5 Punkte) □0 □1 □2 □3 □4 □5

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -2x^2 e^{x-1} + \cos(\pi x) + 2$. Bestimmen Sie die Ableitungen:

$f'(x) =$ □ $\qquad f''(x) =$ □

Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 zum Entwicklungspunkt $x_0 = 1$:

$$T_2(f, x, 1) = \square + \square \cdot (x-1) + \square \cdot (x-1)^2$$

---

**Aufgabe 7** (5 Punkte) □0 □1 □2 □3 □4 □5

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

| | $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{k-2}}{7 \cdot 3^{k+1}} (z - 2\mathrm{i} + 1)^k$ | $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^k}{k^2+2} (3z + \sqrt{5})^k$ | $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} ((4-\mathrm{i})z + 6)^k$ |
|---|---|---|---|
| $z_0$ | | | |
| $\rho$ | | | |

---

**Aufgabe 8** (3 Punkte) □0 □1 □2 □3

Bestimmen Sie die reelle Partialbruchzerlegung für

$$\frac{x^2 + 9x + 12}{(x+2)^2(x+3)} = \frac{\square}{x+2} + \frac{\square}{(x+2)^2} + \frac{\square}{x+3}.$$

---



□1 □2 □3 □4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

| $f(x)$ | $x^a$ | $e^x$ | $\sin x$ | $\tan x$ | $\sinh x$ | $\operatorname{arsinh} x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$ | $a\,x^{a-1}$ | $e^x$ | $\cos x$ | $\frac{1}{(\cos(x))^2}$ | $\cosh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ |
| $f(x)$ | $b^x$ | $\ln\lvert x\rvert$ | $\cos x$ | $\arctan x$ | $\cosh x$ | $\operatorname{arcosh} x$ |
| $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$ | $\ln(b)\,b^x$ | $\frac{1}{x}$ | $-\sin x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ | $\sinh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ |

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+$

| $x$ | $\sin x$ | $\cos x$ |
|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $1$ |
| $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ |
| $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ |
| $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | $1$ | $0$ |

*Viel Erfolg!*

---

**Aufgabe 1** (1 Punkt) □0 □1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

**Name, Vorname:**

**Matrikelnummer:**

**Matrikelnummer:**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| □0 | □0 | □0 | □0 | □0 | □0 | □0 |
| □1 | □1 | □1 | □1 | □1 | □1 | □1 |
| □2 | □2 | □2 | □2 | □2 | □2 | □2 |
| □3 | □3 | □3 | □3 | □3 | □3 | □3 |
| □4 | □4 | □4 | □4 | □4 | □4 | □4 |
| □5 | □5 | □5 | □5 | □5 | □5 | □5 |
| □6 | □6 | □6 | □6 | □6 | □6 | □6 |
| □7 | □7 | □7 | □7 | □7 | □7 | □7 |
| □8 | □8 | □8 | □8 | □8 | □8 | □8 |
| □9 | □9 | □9 | □9 | □9 | □9 | □9 |

**Gruppe:**

| | |
|---|---|
| □0 | □0 |
| □1 | □1 |
| □2 | □2 |
| □3 | □3 |
| □4 | □4 |
| □5 | □5 |
| □6 | □6 |
| □7 | □7 |
| □8 | □8 |
| □9 | □9 |

+2/2/57+

**Aufgabe 2** (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Berechnen Sie:

| $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4^k}{k!}$ | $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k}{7^k}$ | $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{\arctan(x^2 - 9)}$ | $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^{\frac{3}{2}} + x + 2}{2 - 3x^{\frac{3}{2}} + 2x}$ |
|---|---|---|---|
| | | | |

**Aufgabe 3** (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto (x^2 + x - 11)\mathrm{e}^x$.

**(a)** Berechnen Sie $f'(x) =$ ☐ und $f''(x) =$ ☐.

**(b)** Bestimmen Sie die kritischen Stellen von $f$ sowie deren Typ (lok. Max./lok. Min./Sattelpunkt).

| Kritische Stelle | Typ |
|---|---|
| | |

**Aufgabe 4** (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

| $\int 4\mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{d}\,x$ | $\int \frac{2}{x(1+\ln(x))}\,\mathrm{d}\,x$ | $\int_1^3 \frac{1}{x(1+\ln(x))}\,\mathrm{d}\,x$ | $\int_0^{+\infty} \frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x$ |
|---|---|---|---|
| | | | |

**Aufgabe 5** (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Gegeben sind die folgenden Abbildungen.

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto 4(y-z)^2 + x(y-z) \qquad g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 25$$

**(a)** Bestimmen Sie den Gradienten von $f$. $\operatorname{grad} f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$ ☐

**(b)** Geben Sie die vier Gleichungen (in $x$, $y$, $z$ und $\lambda$) an, die die Bedingungen von Lagrange für lokale Extrema von $f$ unter der Nebenbedingung $g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ beschreiben.

**(c)** Gegeben ist eine weitere Abbildung

$$h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x^2 + 2yz.$$

Wir betrachten die Abbildung $f$ unter den Nebenbedingungen $g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ und $h \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$.

Die Anwendung der Multiplikatormethode nach Lagrange ergibt die folgenden kritischen Stellen als Kandidaten für Extremalstellen.

$$P_1 = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right)^{\mathsf{T}},\ P_2 = \left(-\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right)^{\mathsf{T}},\ P_3 = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)^{\mathsf{T}},\ P_4 = \left(-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)^{\mathsf{T}}$$

Bestimmen Sie den kleinsten Wert, den $f$ unter den beiden Nebenbedingungen annimmt.

### Aufgabe 6 (5 Punkte)

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -x^2 \mathrm{e}^{x-1} + \cos(2\pi x) + 2$. Bestimmen Sie die Ableitungen:

$f'(x) =$ ☐ $\qquad f''(x) =$ ☐

Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 zum Entwicklungspunkt $x_0 = 1$:

$$T_2(f, x, 1) = \boxed{\phantom{xx}} + \boxed{\phantom{xx}} \cdot (x-1) + \boxed{\phantom{xx}} \cdot (x-1)^2$$

### Aufgabe 7 (5 Punkte)

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

| | $\sum\limits_{k=3}^{\infty} \frac{7 \cdot 3^{k+1}}{2^{k-1}} (z + 3\mathrm{i} - 3)^k$ | $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-5)^k}{k^3} (\sqrt{5} z - 3)^k$ | $\sum\limits_{k=3}^{\infty} ((1 - 5\mathrm{i}) z - 3)^k$ |
|---|---|---|---|
| $z_0$ | | | |
| $\rho$ | | | |

### Aufgabe 8 (3 Punkte)

☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Bestimmen Sie die reelle Partialbruchzerlegung für

$$\frac{x^2 + 9x + 11}{(x+2)^2 (x+1)} = \frac{\boxed{\phantom{xx}}}{x+2} + \frac{\boxed{\phantom{xx}}}{(x+2)^2} + \frac{\boxed{\phantom{xx}}}{x+1}.$$



☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

| $f(x)$ | $x^a$ | $\mathrm{e}^x$ | $\sin x$ | $\tan x$ | $\sinh x$ | $\operatorname{arsinh} x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$ | $a\, x^{a-1}$ | $\mathrm{e}^x$ | $\cos x$ | $\frac{1}{(\cos(x))^2}$ | $\cosh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ |
| $f(x)$ | $b^x$ | $\ln\lvert x \rvert$ | $\cos x$ | $\arctan x$ | $\cosh x$ | $\operatorname{arcosh} x$ |
| $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$ | $\ln(b)\, b^x$ | $\frac{1}{x}$ | $-\sin x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ | $\sinh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ |

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}^+$

| $x$ | $\sin x$ | $\cos x$ |
|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $1$ |
| $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ |
| $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ |
| $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | $1$ | $0$ |

*Viel Erfolg!*

### Aufgabe 1 (1 Punkt)

☐0 ☐1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

**Name, Vorname:**

**Matrikelnummer:**

**Matrikelnummer:**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐0 | ☐0 | ☐0 | ☐0 | ☐0 | ☐0 | ☐0 |
| ☐1 | ☐1 | ☐1 | ☐1 | ☐1 | ☐1 | ☐1 |
| ☐2 | ☐2 | ☐2 | ☐2 | ☐2 | ☐2 | ☐2 |
| ☐3 | ☐3 | ☐3 | ☐3 | ☐3 | ☐3 | ☐3 |
| ☐4 | ☐4 | ☐4 | ☐4 | ☐4 | ☐4 | ☐4 |
| ☐5 | ☐5 | ☐5 | ☐5 | ☐5 | ☐5 | ☐5 |
| ☐6 | ☐6 | ☐6 | ☐6 | ☐6 | ☐6 | ☐6 |
| ☐7 | ☐7 | ☐7 | ☐7 | ☐7 | ☐7 | ☐7 |
| ☐8 | ☐8 | ☐8 | ☐8 | ☐8 | ☐8 | ☐8 |
| ☐9 | ☐9 | ☐9 | ☐9 | ☐9 | ☐9 | ☐9 |

**Gruppe:**

| | |
|---|---|
| ☐0 | ☐0 |
| ☐1 | ☐1 |
| ☐2 | ☐2 |
| ☐3 | ☐3 |
| ☐4 | ☐4 |
| ☐5 | ☐5 |
| ☐6 | ☐6 |
| ☐7 | ☐7 |
| ☐8 | ☐8 |
| ☐9 | ☐9 |

**Aufgabe 2** (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Berechnen Sie:

| $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{5^k}$ | $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sin(3x\pi)}{\cos\left(\frac{x\pi}{8}\right)}$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3\sqrt{x}+2x^2+6x}{1-4\sqrt{x}+7x^2}$ | $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$ |
|---|---|---|---|
| | | | |

**Aufgabe 3** (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto (x^2 - x - 11)\mathrm{e}^x$.

**(a)** Berechnen Sie $f'(x) =$ ☐ und $f''(x) =$ ☐.

**(b)** Bestimmen Sie die kritischen Stellen von $f$ sowie deren Typ (lok. Max./lok. Min./Sattelpunkt).

| Kritische Stelle | Typ |
|---|---|
| | |

**Aufgabe 4** (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

| $\int \frac{-2}{x(1+\ln(x))}\,\mathrm{d}\,x$ | $\int_1^4 \frac{1}{x(1+\ln(x))}\,\mathrm{d}\,x$ | $\int 8\mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{d}\,x$ | $\int_0^{+\infty} \frac{4}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x$ |
|---|---|---|---|
| | | | |

**Aufgabe 5** (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Gegeben sind die folgenden Abbildungen.

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto 3(x-z)^2 + y(x-z) \qquad g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 49$$

**(a)** Bestimmen Sie den Gradienten von $f$. $\operatorname{grad} f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$ ☐

**(b)** Geben Sie die vier Gleichungen (in $x$, $y$, $z$ und $\lambda$) an, die die Bedingungen von Lagrange für lokale Extrema von $f$ unter der Nebenbedingung $g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ beschreiben.

**(c)** Gegeben ist eine weitere Abbildung

$$h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto y^2 + 2xz.$$

Wir betrachten die Abbildung $f$ unter den Nebenbedingungen $g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ und $h\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$.

Die Anwendung der Multiplikatormethode nach Lagrange ergibt die folgenden kritischen Stellen als Kandidaten für Extremalstellen.

$$P_1 = \left(\frac{7}{2}, \frac{7}{\sqrt{2}}, -\frac{7}{2}\right)^\intercal, P_2 = \left(\frac{7}{2}, -\frac{7}{\sqrt{2}}, -\frac{7}{2}\right)^\intercal, P_3 = \left(-\frac{7}{2}, \frac{7}{\sqrt{2}}, \frac{7}{2}\right)^\intercal, P_4 = \left(-\frac{7}{2}, -\frac{7}{\sqrt{2}}, \frac{7}{2}\right)^\intercal$$

Bestimmen Sie den kleinsten Wert, den $f$ unter den beiden Nebenbedingungen annimmt.

**Aufgabe 6** (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x^2 \mathrm{e}^{x-1} + \cos(\pi x) + 2$. Bestimmen Sie die Ableitungen:

$f'(x) =$ ☐ $f''(x) =$ ☐

Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 zum Entwicklungspunkt $x_0 = 1$:

$T_2(f, x, 1) =$ ☐ $+$ ☐ $\cdot (x-1) +$ ☐ $\cdot (x-1)^2$

**Aufgabe 7** (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

| | $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^{k-1}}{5 \cdot 3^{k+1}} (z + 6\mathrm{i} - 1)^k$ | $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-4)^k}{(k+1)^2} (\sqrt{3}z + 2)^k$ | $\sum_{k=2}^{\infty} ((2-\mathrm{i})z + 2)^k$ |
|---|---|---|---|
| $z_0$ | | | |
| $\rho$ | | | |

**Aufgabe 8** (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Bestimmen Sie die reelle Partialbruchzerlegung für

$$\frac{x^2 + 9x + 10}{(x+3)^2(x+2)} = \frac{\square}{x+3} + \frac{\square}{(x+3)^2} + \frac{\square}{x+2}.$$

**Scheinklausur** **Höhere Mathematik 2** **13. 7. 2019**

☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

| $f(x)$ | $x^a$ | $\mathrm{e}^x$ | $\sin x$ | $\tan x$ | $\sinh x$ | $\operatorname{arsinh} x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$ | $a\, x^{a-1}$ | $\mathrm{e}^x$ | $\cos x$ | $\frac{1}{(\cos(x))^2}$ | $\cosh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ |
| $f(x)$ | $b^x$ | $\ln\lvert x\rvert$ | $\cos x$ | $\arctan x$ | $\cosh x$ | $\operatorname{arcosh} x$ |
| $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$ | $\ln(b)\, b^x$ | $\frac{1}{x}$ | $-\sin x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ | $\sinh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ |

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+$

| $x$ | $\sin x$ | $\cos x$ |
|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $1$ |
| $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ |
| $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ |
| $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | $1$ | $0$ |

*Viel Erfolg!*

**Aufgabe 1** (1 Punkt) ☐0 ☐1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

**Name, Vorname:**

**Matrikelnummer:**

**Matrikelnummer:**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐0 | ☐0 | ☐0 | ☐0 | ☐0 | ☐0 | ☐0 |
| ☐1 | ☐1 | ☐1 | ☐1 | ☐1 | ☐1 | ☐1 |
| ☐2 | ☐2 | ☐2 | ☐2 | ☐2 | ☐2 | ☐2 |
| ☐3 | ☐3 | ☐3 | ☐3 | ☐3 | ☐3 | ☐3 |
| ☐4 | ☐4 | ☐4 | ☐4 | ☐4 | ☐4 | ☐4 |
| ☐5 | ☐5 | ☐5 | ☐5 | ☐5 | ☐5 | ☐5 |
| ☐6 | ☐6 | ☐6 | ☐6 | ☐6 | ☐6 | ☐6 |
| ☐7 | ☐7 | ☐7 | ☐7 | ☐7 | ☐7 | ☐7 |
| ☐8 | ☐8 | ☐8 | ☐8 | ☐8 | ☐8 | ☐8 |
| ☐9 | ☐9 | ☐9 | ☐9 | ☐9 | ☐9 | ☐9 |

**Gruppe:**

| | |
|---|---|
| ☐0 | ☐0 |
| ☐1 | ☐1 |
| ☐2 | ☐2 |
| ☐3 | ☐3 |
| ☐4 | ☐4 |
| ☐5 | ☐5 |
| ☐6 | ☐6 |
| ☐7 | ☐7 |
| ☐8 | ☐8 |
| ☐9 | ☐9 |

**Aufgabe 2** (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Berechnen Sie:

| $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\ln(x^2-3)}{x^3-8}$ | $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3x^{\frac{3}{2}}+4x+6}{1+5x-4x^{\frac{3}{2}}}$ | $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{5^k}{k!}$ | $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{5^k}$ |
|---|---|---|---|
| | | | |

**Aufgabe 3** (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto (x^2+2x-14)\mathrm{e}^x$.

**(a)** Berechnen Sie $f'(x) =$ ☐ und $f''(x) =$ ☐.

**(b)** Bestimmen Sie die kritischen Stellen von $f$ sowie deren Typ (lok. Max./lok. Min./Sattelpunkt).

| Kritische Stelle | Typ |
|---|---|
| | |

**Aufgabe 4** (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

| $\int 6\mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{d}\,x$ | $\int \frac{3}{x(1+\ln(x))}\,\mathrm{d}\,x$ | $\int_1^5 \frac{1}{x(1+\ln(x))}\,\mathrm{d}\,x$ | $\int_0^{+\infty} \frac{8}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x$ |
|---|---|---|---|
| | | | |

**Aufgabe 5** (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Gegeben sind die folgenden Abbildungen.

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto 2(y-z)^2 + x(y-z) \qquad g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x^2+y^2+z^2-81$$

**(a)** Bestimmen Sie den Gradienten von $f$. $\operatorname{grad} f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$ ☐

**(b)** Geben Sie die vier Gleichungen (in $x$, $y$, $z$ und $\lambda$) an, die die Bedingungen von Lagrange für lokale Extrema von $f$ unter der Nebenbedingung $g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ beschreiben.

**(c)** Gegeben ist eine weitere Abbildung

$$h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x^2 + 2yz.$$

Wir betrachten die Abbildung $f$ unter den Nebenbedingungen $g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ und $h\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$.

Die Anwendung der Multiplikatormethode nach Lagrange ergibt die folgenden kritischen Stellen als Kandidaten für Extremalstellen.

$$P_1 = \left(\frac{9}{\sqrt{2}}, \frac{9}{2}, -\frac{9}{2}\right)^{\intercal},\ P_2 = \left(-\frac{9}{\sqrt{2}}, \frac{9}{2}, -\frac{9}{2}\right)^{\intercal},\ P_3 = \left(\frac{9}{\sqrt{2}}, -\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)^{\intercal},\ P_4 = \left(-\frac{9}{\sqrt{2}}, -\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)^{\intercal}$$

Bestimmen Sie den kleinsten Wert, den $f$ unter den beiden Nebenbedingungen annimmt.