Aufgabe 8 (8 Punkte) □0 □1 □2 □3 □4 □5 □6 □7 ■8

Gegeben sei bezüglich des Standardkoordinatensystems $\mathbb{E}$ die affine Abbildung

$$\alpha\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2\colon v \mapsto Av + t = \begin{pmatrix} 3+\mathrm{i} & -4 \\ 2 & -3+\mathrm{i} \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Ergebnisse in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

(a) Geben Sie die Determinante und die Spur von A an.

$$\det(A) = \boxed{-2}\,, \qquad \mathrm{Sp}(A) = \boxed{2\mathrm{i}}$$

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von A.

$$V\left(\boxed{-1+\mathrm{i}}\right) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)}\,, \quad V(1+\mathrm{i}) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)}$$

(c) Bestimmen Sie die folgende Koordinatentransformation bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{F} = ((0,0)^\intercal; f_1, f_2)$, wobei f_1, f_2 eine Basis (des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\mathbb{C}^2$) aus Eigenvektoren von A ist.

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\left({}_{\mathbb{E}}v\right) = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} {}_{\mathbb{E}}v}$$

(d) Bestimmen Sie die Beschreibung ${}_{\mathbb{F}}\alpha_{\mathbb{F}}$ von α bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{F}$ aus **(c)**.

$${}_{\mathbb{F}}\alpha_{\mathbb{F}}\left({}_{\mathbb{F}}v\right) = \boxed{\begin{pmatrix} -1+\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix} {}_{\mathbb{F}}v + \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 9 (2 Punkte) □0 □1 ■2

Seien $v = \frac{1}{3}(2,2,1)^\intercal$ und $w = \frac{1}{3}(1,-2,2)^\intercal$ Vektoren aus $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie $u \in \mathbb{R}^3$ derart, dass $L : u, v, w$ ein Linkssystem ist.

$$u = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

(b) Es sei $P = (-2,0,0)^\intercal$. Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene $E\colon P + \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$.

$$\left\langle \left(\boxed{-\tfrac{1}{3}}, \boxed{\tfrac{2}{3}}, \boxed{-\tfrac{2}{3}} \right)^\intercal \middle| x \right\rangle = \boxed{\tfrac{2}{3}}$$

+1000/1/60+

Scheinklausur | **Höhere Mathematik 1** | **16. 7. 2019**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ■1 □2 □3 □4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) □0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

□0	□0	□0	□0	□0	□0	□0
□1	□1	□1	□1	□1	□1	□1
□2	□2	□2	□2	□2	□2	□2
□3	□3	□3	□3	□3	□3	□3
□4	□4	□4	□4	□4	□4	□4
□5	□5	□5	□5	□5	□5	□5
□6	□6	□6	□6	□6	□6	□6
□7	□7	□7	□7	□7	□7	□7
□8	□8	□8	□8	□8	□8	□8
□9	□9	□9	□9	□9	□9	□9

Gruppe:

□0	□0
□1	□1
□2	□2
□3	□3
□4	□4
□5	□5
□6	□6
□7	□7
□8	□8
□9	□9

Aufgabe 2 (2 Punkte) □0 □1 ■2

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte. Tragen Sie „divergent" ein, falls kein Grenzwert existiert.

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{5}{3^k}(-2)^k = \boxed{3}\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{3\cos(n^3) - n}{2n} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

Aufgabe 3 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ■2

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{C} \setminus \{1-5\mathrm{i}\}$ der folgenden Ungleichung:

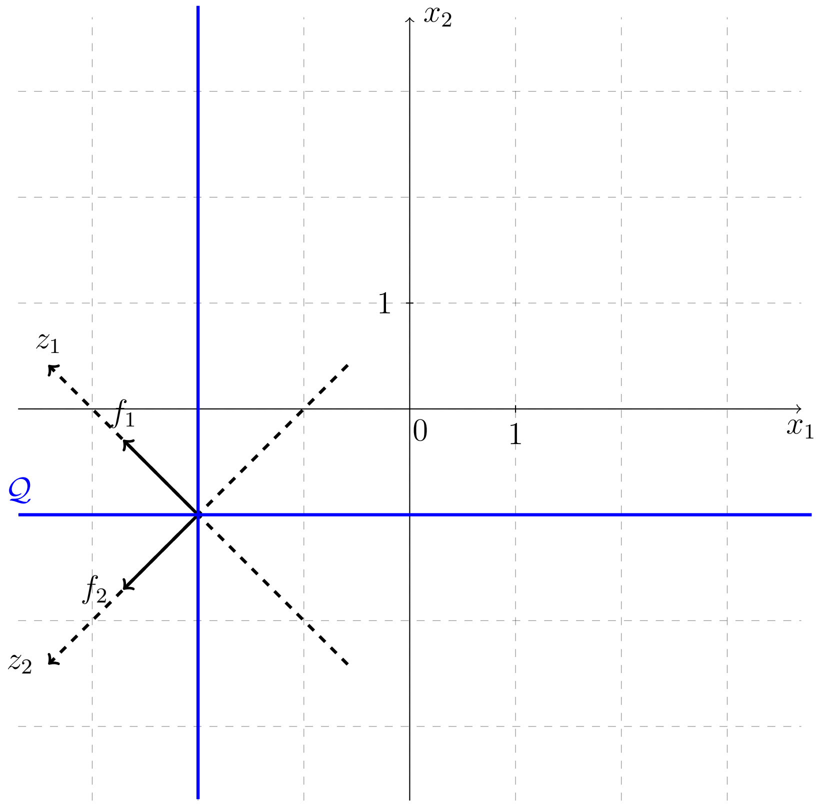
$$\frac{|z-1+3\mathrm{i}|}{|z-1+5\mathrm{i}|} \leqq 1. \qquad \mathcal{L} = \boxed{\left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{1-5\mathrm{i}\} \;\middle|\; \operatorname{Im}(z) \geqq -4 \right\}}$$

Aufgabe 4 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ■2

Bezüglich des kartesischen Koordinatensystems $\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

sei die Quadrik $\mathcal{Q}$ beschrieben durch die Gleichung $z_1^2 - z_2^2 = 0$.

Skizzieren Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ sowie die Quadrik $\mathcal{Q}$ im Standardkoordinatensystem.



Aufgabe 5 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Bestimmen Sie die uneigentliche Isometrie $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche die folgenden Bedingungen erfüllt.

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha(v) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 6 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Gegeben sei die symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\operatorname{Sp} A = -4$, den Eigenwerten $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ und den Eigenräumen $V(\lambda_1) = \mathrm{L}\left((1,3,0)^\mathsf{T}\right)$ und $V(\lambda_2) = \mathrm{L}\left((0,0,1)^\mathsf{T}\right)$.

(a) Bestimmen Sie den dritten Eigenwert: $\lambda_3 = \boxed{-3}$.

(b) Bestimmen Sie: $\det(A) = \boxed{6}$.

(c) Geben Sie eine Transformationsmatrix T und die dazugehörige Diagonalmatrix D so an, dass $D = T^{-1}AT$.

$$T = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}, \quad D = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 7 (7 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ■7

Es sei $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad höchstens 2 mit den Basen

$$M\colon 1, X, X^2 \quad \text{und} \quad C\colon 1, 2-X, X^2.$$

Weiterhin sei die lineare Abbildung $\varphi\colon \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R} \to \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}\colon p(X) \mapsto p(-3)\,X$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie:

$$\varphi(1+X) = \boxed{-2X}.$$

(b) Bestimmen Sie ${}_M\varphi_M$ und ${}_M\mathrm{id}_C$:

$${}_M\varphi_M = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \quad {}_M\mathrm{id}_C = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

(c) Bestimmen Sie:

$${}_C(\varphi(1+X)) = \left(\boxed{-4, 2, 0} \right)^\mathsf{T}.$$

(d) Bestimmen Sie $\dim(\operatorname{Kern}(\varphi))$ und eine Basis B von $\operatorname{Kern}(\varphi)$.

$\dim(\operatorname{Kern}(\varphi)) = \boxed{2}$, $\quad B: \boxed{X+3,\ X^2-9}$

Aufgabe 8 (8 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ■8

Gegeben sei bezüglich des Standardkoordinatensystems $\mathbb{E}$ die affine Abbildung

$$\alpha\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2\colon v \mapsto Av + t = \begin{pmatrix} -2+3\mathrm{i} & 4\mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} & -2-3\mathrm{i} \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Ergebnisse in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

(a) Geben Sie die Spur und die Determinante von A an.

$$\mathrm{Sp}\,(A) = \boxed{-4}\,, \qquad \det\,(A) = \boxed{5}$$

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von A.

$$V\left(\boxed{-2-\mathrm{i}}\right) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}\,, \quad V(-2+\mathrm{i}) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}$$

(c) Bestimmen Sie die folgende Koordinatentransformation bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{F} = ((0,0)^\intercal; f_1, f_2)$, wobei f_1, f_2 eine Basis (des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\mathbb{C}^2$) aus Eigenvektoren von A ist.

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\left({}_{\mathbb{E}}v\right) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} {}_{\mathbb{E}}v}$$

(d) Bestimmen Sie die Beschreibung ${}_{\mathbb{F}}\alpha_{\mathbb{F}}$ von α bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{F}$ aus **(c)**.

$${}_{\mathbb{F}}\alpha_{\mathbb{F}}\left({}_{\mathbb{F}}v\right) = \boxed{\begin{pmatrix} -2+\mathrm{i} & 0 \\ 0 & -2-\mathrm{i} \end{pmatrix} {}_{\mathbb{F}}v + \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 9 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ■2

Seien $v = \frac{1}{3}(2,1,2)^\intercal$ und $w = \frac{1}{3}(1,2,-2)^\intercal$ Vektoren aus $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie $u \in \mathbb{R}^3$ derart, dass $L : u, v, w$ ein Linkssystem ist.

$$u = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

(b) Es sei $P = (-4, 0, 0)^\intercal$. Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene $E\colon P + \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$.

$$\left\langle \left(\boxed{-\frac{1}{3}}\,, \boxed{-\frac{2}{3}}\,, \boxed{\frac{2}{3}} \right)^\intercal \middle|\, x \right\rangle = \boxed{\frac{4}{3}}$$

Scheinklausur | **Höhere Mathematik 1** | **16. 7. 2019**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ☐1 ■2 ☐3 ☐4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Aufgabe 2 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ■2

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte. Tragen Sie „divergent“ ein, falls kein Grenzwert existiert.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3\sin(n^3) + 5n}{4n} = \boxed{\frac{5}{4}}\,, \qquad \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{7}{4^k}(-3)^k = \boxed{4}$$

Aufgabe 3 (2 Punkte) 0 1 2

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L} \subseteqq \mathbb{C} \setminus \{-4-3\mathrm{i}\}$ der folgenden Ungleichung:

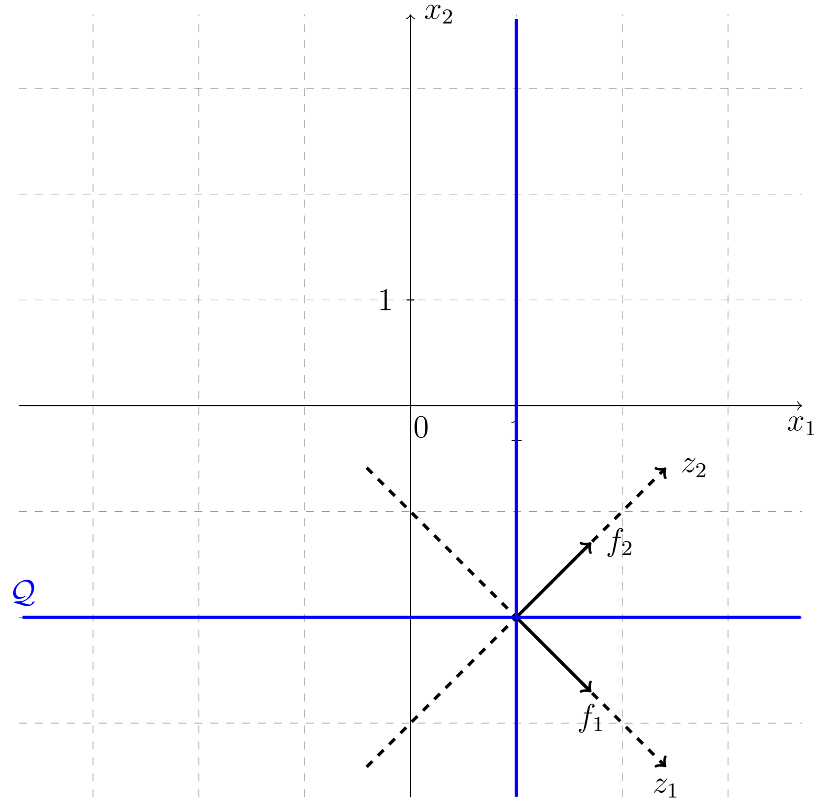
$$\frac{|z-2+3\mathrm{i}|}{|z+4+3\mathrm{i}|} \leqq 1. \qquad \mathcal{L} = \boxed{\left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{-4-3\mathrm{i}\} \;\middle|\; \mathrm{Re}(z) \geqq -1 \right\}}$$

Aufgabe 4 (2 Punkte) 0 1 2

Bezüglich des kartesischen Koordinatensystems $\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} ; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

sei die Quadrik $\mathcal{Q}$ beschrieben durch die Gleichung $z_1^2 - z_2^2 = 0$.

Skizzieren Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ sowie die Quadrik $\mathcal{Q}$ im Standardkoordinatensystem.



Aufgabe 5 (3 Punkte) 0 1 2 3

Bestimmen Sie die uneigentliche Isometrie $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche die folgenden Bedingungen erfüllt.

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha(v) = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 6 (4 Punkte) 0 1 2 3 4

Gegeben sei die symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\mathrm{Sp}\, A = 4$, den Eigenwerten $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ und den Eigenräumen $V(\lambda_1) = \mathrm{L}\left((0,1,0)^\intercal\right)$ und $V(\lambda_2) = \mathrm{L}\left((2,0,1)^\intercal\right)$.

(a) Bestimmen Sie den dritten Eigenwert: $\lambda_3 = \boxed{3}$.

(b) Bestimmen Sie: $\det(A) = \boxed{-6}$.

(c) Geben Sie eine Transformationsmatrix T und die dazugehörige Diagonalmatrix D so an, dass $D = T^{-1}AT$.

$$T = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}}, \quad D = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 7 (7 Punkte) 0 1 2 3 4 5 6 7

Es sei $\mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad höchstens 2 mit den Basen

$$M\colon 1, X, X^2 \quad \text{und} \quad C\colon 1, X, -1-X^2.$$

Weiterhin sei die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R} \to \mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}\colon p(X) \mapsto p(-2)\,X^2$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie:

$$\varphi(X-1) = \boxed{-3X^2} .$$

(b) Bestimmen Sie ${}_M\varphi_M$ und ${}_M\mathrm{id}_C$:

$${}_M\varphi_M = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}}, \quad {}_M\mathrm{id}_C = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}} .$$

(c) Bestimmen Sie:

$${}_C(\varphi(X-1)) = \left(\boxed{3, 0, 3}\right)^\intercal .$$

(d) Bestimmen Sie eine Basis B von $\mathrm{Kern}(\varphi)$ und $\dim(\mathrm{Kern}(\varphi))$.

B : $\boxed{X+2,\ X^2-4}$, $\dim(\mathrm{Kern}(\varphi)) = \boxed{2}$

Aufgabe 8 (8 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ■8

Gegeben sei bezüglich des Standardkoordinatensystems $\mathbb{E}$ die affine Abbildung

$$\alpha\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2\colon v \mapsto Av + t = \begin{pmatrix} -3-\mathrm{i} & 2 \\ -4 & 3-\mathrm{i} \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Ergebnisse in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

(a) Geben Sie die Determinante und die Spur von A an.

$$\det(A) = \boxed{-2}\,, \qquad \mathrm{Sp}(A) = \boxed{-2\mathrm{i}}$$

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von A.

$$V\left(\boxed{-1-\mathrm{i}}\right) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)}\,, \quad V(1-\mathrm{i}) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)}$$

(c) Bestimmen Sie die folgende Koordinatentransformation bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{F} = ((0,0)^\intercal; f_1, f_2)$, wobei $f_1,\ f_2$ eine Basis (des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\mathbb{C}^2$) aus Eigenvektoren von A ist.

$$_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\left(_{\mathbb{E}}v\right) = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} {}_{\mathbb{E}}v}$$

(d) Bestimmen Sie die Beschreibung $_{\mathbb{F}}\alpha_{\mathbb{F}}$ von α bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{F}$ aus **(c)**.

$$_{\mathbb{F}}\alpha_{\mathbb{F}}\left(_{\mathbb{F}}v\right) = \boxed{\begin{pmatrix} -1-\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix} {}_{\mathbb{F}}v + \begin{pmatrix} 2\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 9 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ■2

Seien $v = \frac{1}{3}(2,1,2)^\intercal$ und $w = \frac{1}{3}(-2,2,1)^\intercal$ Vektoren aus $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie $u \in \mathbb{R}^3$ derart, dass $L: u, v, w$ ein Linkssystem ist.

$$u = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

(b) Es sei $P = (0,0,-1)^\intercal$. Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene $E\colon P + \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$.

$$\left\langle \left(\boxed{\frac{2}{3}}, \boxed{-\frac{2}{3}}, \boxed{-\frac{1}{3}} \right)^\intercal \middle| x \right\rangle = \boxed{\frac{1}{3}}$$

Scheinklausur **Höhere Mathematik 1** **16. 7. 2019**

☐1 ☐2 ■3 ☐4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ■2

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte. Tragen Sie „divergent“ ein, falls kein Grenzwert existiert.

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{-3}{3^k} 2^k = \boxed{-9}\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{4\cos(n^4) + 3n}{4n} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

Aufgabe 3 (2 Punkte) 0 1 2

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L} \subsetneqq \mathbb{C} \setminus \{-1+2\mathrm{i}\}$ der folgenden Ungleichung:

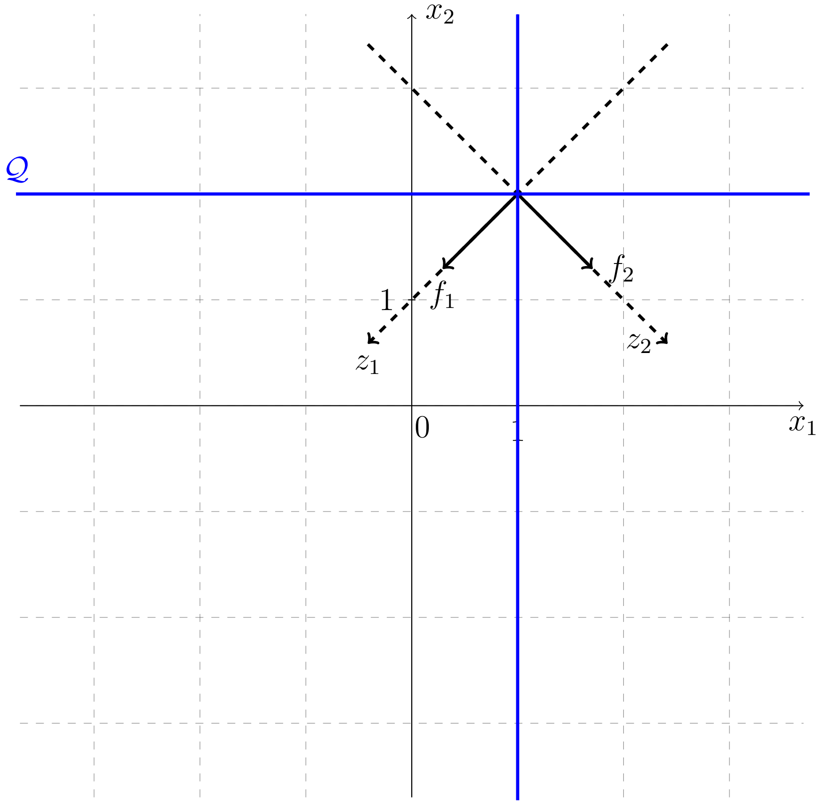
$$\frac{|z-3-2\mathrm{i}|}{|z+1-2\mathrm{i}|} \geqq 1. \qquad \mathcal{L} = \boxed{\left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{-1+2\mathrm{i}\} \;\middle|\; \mathrm{Re}(z) \leqq 1 \right\}}$$

Aufgabe 4 (2 Punkte) 0 1 2

Bezüglich des kartesischen Koordinatensystems $\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

sei die Quadrik $\mathcal{Q}$ beschrieben durch die Gleichung $z_1^2 - z_2^2 = 0$.

Skizzieren Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ sowie die Quadrik $\mathcal{Q}$ im Standardkoordinatensystem.



Aufgabe 5 (3 Punkte) 0 1 2 3

Bestimmen Sie die uneigentliche Isometrie $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche die folgenden Bedingungen erfüllt.

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha(v) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 6 (4 Punkte) 0 1 2 3 4

Gegeben sei die symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ mit $\mathrm{Sp}\, A = 1$, den Eigenwerten $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -1$ und den Eigenräumen $V(\lambda_1) = \mathrm{L}\left((1,2,0)^\intercal\right)$ und $V(\lambda_2) = \mathrm{L}\left((0,0,1)^\intercal\right)$.

(a) Bestimmen Sie den dritten Eigenwert: $\lambda_3 = \boxed{-2}$.

(b) Bestimmen Sie: $\det(A) = \boxed{8}$.

(c) Geben Sie eine Transformationsmatrix T und die dazugehörige Diagonalmatrix D so an, dass $D = T^{-1}AT$.

$$T = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}, \quad D = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 7 (7 Punkte) 0 1 2 3 4 5 6 7

Es sei $\mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad höchstens 2 mit den Basen

$$M\colon 1, X, X^2 \quad \text{und} \quad C\colon -1, 2+X, X^2.$$

Weiterhin sei die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R} \to \mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}\colon p(X) \mapsto -p(3)\,X$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie:

$$\varphi(1-X) = \boxed{2X} .$$

(b) Bestimmen Sie ${}_M\varphi_M$ und ${}_M\mathrm{id}_C$:

$${}_M\varphi_M = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \quad {}_M\mathrm{id}_C = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} .$$

(c) Bestimmen Sie:

$${}_C(\varphi(1-X)) = \left(\boxed{4, 2, 0} \right)^\intercal .$$

(d) Bestimmen Sie $\dim(\mathrm{Kern}\,(\varphi))$ und eine Basis B von $\mathrm{Kern}\,(\varphi)$.

$\dim(\mathrm{Kern}\,(\varphi)) = \boxed{2}$, $\quad B : \boxed{X-3,\ X^2-9}$

Aufgabe 8 (8 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ■8

Gegeben sei bezüglich des Standardkoordinatensystems $\mathbb{E}$ die affine Abbildung

$$\alpha\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \colon v \mapsto Av + t = \begin{pmatrix} 2-3\mathrm{i} & -2\mathrm{i} \\ 4\mathrm{i} & 2+3\mathrm{i} \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Ergebnisse in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

(a) Geben Sie die Spur und die Determinante von A an.

$\operatorname{Sp}(A) = \boxed{4}$, $\det(A) = \boxed{5}$

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von A.

$V\left(\boxed{2-\mathrm{i}}\right) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}$, $V(2+\mathrm{i}) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)}$

(c) Bestimmen Sie die folgende Koordinatentransformation bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{F} = ((0,0)^\intercal; f_1, f_2)$, wobei $f_1,\ f_2$ eine Basis (des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\mathbb{C}^2$) aus Eigenvektoren von A ist.

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\left({}_{\mathbb{E}}v\right) = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} {}_{\mathbb{E}}v}$$

(d) Bestimmen Sie die Beschreibung ${}_{\mathbb{F}}\alpha_{\mathbb{F}}$ von α bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{F}$ aus **(c)**.

$${}_{\mathbb{F}}\alpha_{\mathbb{F}}\left({}_{\mathbb{F}}v\right) = \boxed{\begin{pmatrix} 2+\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 2-\mathrm{i} \end{pmatrix} {}_{\mathbb{F}}v + \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 9 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ■2

Seien $v = \frac{1}{3}(1,2,2)^\intercal$ und $w = \frac{1}{3}(2,1,-2)^\intercal$ Vektoren aus $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie $u \in \mathbb{R}^3$ derart, dass $L : u, v, w$ ein Linkssystem ist.

$$u = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

(b) Es sei $P = (0,-5,0)^\intercal$. Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene $E\colon P + \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$.

$$\left\langle \left(\boxed{-\frac{2}{3}}, \boxed{-\frac{1}{3}}, \boxed{\frac{2}{3}} \right)^\intercal \middle| x \right\rangle = \boxed{\frac{5}{3}}$$

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ☐1 ☐2 ☐3 ■4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ■2

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte. Tragen Sie „divergent“ ein, falls kein Grenzwert existiert.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4\sin(n^4) - n}{3n} = \boxed{-\frac{1}{3}}, \qquad \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{-2}{4^k} 2^k = \boxed{-4}$$

Aufgabe 3 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ■2

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L} \subsetneqq \mathbb{C} \setminus \{-2-4\mathrm{i}\}$ der folgenden Ungleichung:

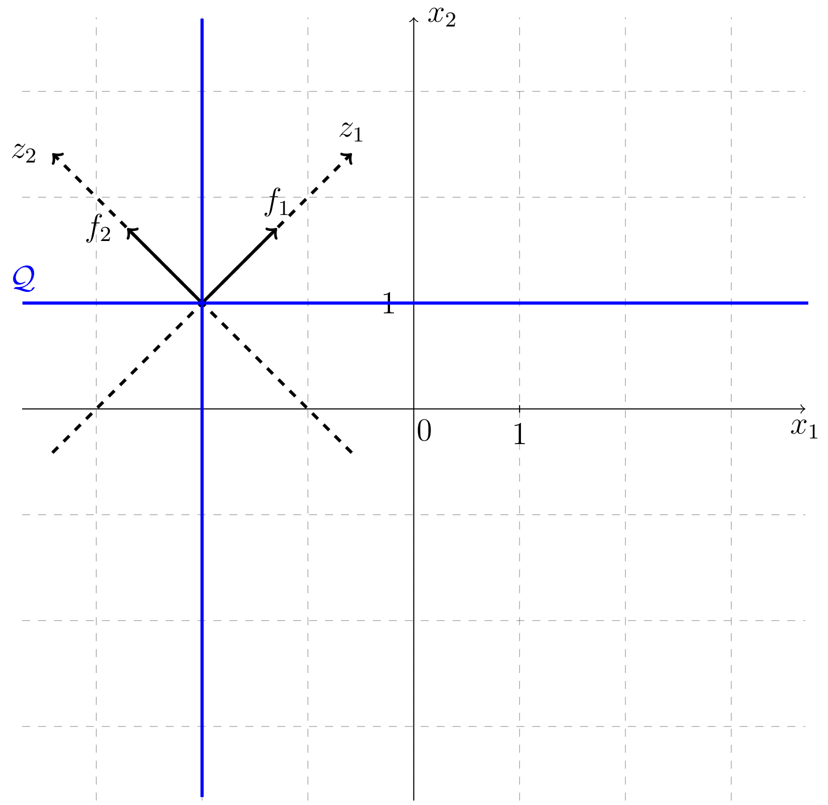
$$\frac{|z+2+2\mathrm{i}|}{|z+2+4\mathrm{i}|} \geqq 1. \qquad \mathcal{L} = \boxed{\left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{-2-4\mathrm{i}\} \,\middle|\, \operatorname{Im}(z) \leqq -3 \right\}}$$

Aufgabe 4 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ■2

Bezüglich des kartesischen Koordinatensystems $\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

sei die Quadrik $\mathcal{Q}$ beschrieben durch die Gleichung $z_1^2 - z_2^2 = 0$.

Skizzieren Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ sowie die Quadrik $\mathcal{Q}$ im Standardkoordinatensystem.



Aufgabe 5 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Bestimmen Sie die uneigentliche Isometrie $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche die folgenden Bedingungen erfüllt.

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha(v) = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 6 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Gegeben sei die symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\operatorname{Sp} A = -1$, den Eigenwerten $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -4$ und den Eigenräumen $V(\lambda_1) = \mathrm{L}\left((0,1,0)^\intercal\right)$ und $V(\lambda_2) = \mathrm{L}\left((1,0,3)^\intercal\right)$.

(a) Bestimmen Sie den dritten Eigenwert: $\lambda_3 = \boxed{2}$.

(b) Bestimmen Sie: $\det(A) = \boxed{-8}$.

(c) Geben Sie eine Transformationsmatrix T und die dazugehörige Diagonalmatrix D so an, dass $D = T^{-1}AT$.

$$T = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}}, \quad D = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 7 (7 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ■7

Es sei $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad höchstens 2 mit den Basen

$$M\colon 1, X, X^2 \quad \text{und} \quad C\colon 1, -X, 1-X^2.$$

Weiterhin sei die lineare Abbildung $\varphi\colon \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R} \to \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}\colon p(X) \mapsto -p(2)\,X^2$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie:

$$\varphi(2+X) = \boxed{-4X^2}.$$

(b) Bestimmen Sie ${}_M\varphi_M$ und ${}_M\mathrm{id}_C$:

$${}_M\varphi_M = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}}, \quad {}_M\mathrm{id}_C = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}.$$

(c) Bestimmen Sie:

$${}_C(\varphi(2+X)) = \left(\boxed{-4, 0, 4}\right)^\intercal.$$

(d) Bestimmen Sie eine Basis B von $\operatorname{Kern}(\varphi)$ und $\dim(\operatorname{Kern}(\varphi))$.

$B:$ $\boxed{X-2,\ X^2-4}$, $\dim(\operatorname{Kern}(\varphi)) = \boxed{2}$