Aufgabe 6 (4 Punkte) 0 1 2 3 4

Berechnen Sie:

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{7}{3^k}$	$\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{7}{3^k}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2\ln(x)+\sin(x)+4x}{9x+7\ln(x)}$	$\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!}\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2k+1}$
$\frac{21}{2}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{\pi}{6}$

Aufgabe 7 (6 Punkte) 0 1 2 3 4 5 6

Gegeben ist der Quotient $\dfrac{x^2+2x+6}{x(x^2+1)}$.

(a) Bestimmen Sie die reelle Partialbruchzerlegung

$$\frac{x^2+2x+6}{x(x^2+1)} = \frac{\boxed{6}}{x} + \frac{\boxed{-5}\,x + \boxed{2}}{x^2+1}.$$

(b) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{x^2+2x+6}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[6\ln(|x|) - \frac{5\ln(x^2+1)}{2} + 2\arctan(x)\right]}.$$

Aufgabe 8 (3 Punkte) 0 1 2 3

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^1 (x^2+3)\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\frac{10}{3}}$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)(\cos(x))^2\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\frac{1}{3}}$

(c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{4}{x^3}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{2}$

1 2 3 4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) 0 1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9

Gruppe:

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Aufgabe 2 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto (4-x)(y^2+x)$.

(a) Berechnen Sie $\operatorname{grad} f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x - y^2 + 4 \\ -2xy + 8y \end{pmatrix}$

(b) Berechnen Sie die Hesse-Matrix $\mathrm{H}f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2y \\ -2y & 8-2x \end{pmatrix}$

(c) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f und geben Sie jeweils deren Typ (lok. Max./lok. Min./Sattelpunkt) an.

Die einzige kritische Stelle ist $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und es liegt hier ein Sattelpunkt vor.

Aufgabe 3 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum_{k=4}^{\infty} \left(\frac{2k-1}{k}\right)^k (3z+4)^k$	$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4^k}{k!}((2-2\mathrm{i})z - 4\mathrm{i})^k$	$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{3^k}(z+\sqrt{2})^{2k}$
z_0	$-\frac{4}{3}$	$\mathrm{i}-1$	$-\sqrt{2}$
ρ	$\frac{1}{6}$	$+\infty$	$\sqrt{3}$

Aufgabe 4 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{2x^2+1}.$$

Berechnen Sie die ersten zwei Ableitungen von f.

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$$

$$f''(x) = \frac{2}{(2x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

Stellen Sie das Taylorpolynom $T_2(f,x,2)$ der Stufe 2 um den Entwicklungspunkt 2 auf.

$$T_2(f,x,2) = 3 + \frac{4}{3}(x-2) + \frac{1}{27}(x-2)^2$$

Aufgabe 5 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Gegeben ist das folgende von einem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Vektorfeld.

$$g_\alpha \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1^2 + \alpha e^{(\alpha x_2)} - 4x_1x_2 \\ -2x_1^2 + e^{(\alpha x_2)}(2x_2 + 3\alpha x_1) \end{pmatrix}$$

(a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt g_α ein Potential? $\alpha \in \{0, 3\}$

(b) Bestimmen Sie ein Potential U für das Vektorfeld g_0.

$$U\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}x_1^3 - 2x_1^2x_2 + x_2^2$$

(c) Sei $C\colon [0,2] \to \mathbb{R}^2 \colon t \mapsto \begin{pmatrix} e^t \\ 2t \end{pmatrix}$ eine Parametrisierung einer Kurve K.

Berechnen Sie $C(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $C(2) = \begin{pmatrix} e^2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie das folgende Kurvenintegral.

$$\int_K g_0(x) \bullet \mathrm{d}\,x = \frac{2}{3}e^6 - 8e^4 + \frac{46}{3}$$