Aufgabe 7 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Gegeben seien die Gerade g und die Punkte R, U im $\mathbb{R}^3$ durch

$$g := \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\} \qquad \text{und} \qquad R := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad U := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene E, die die Gerade g und den Punkt R enthält.

E: ☐ $\cdot x_1 +$ ☐ $\cdot x_2 +$ ☐ $\cdot x_3 =$ ☐

(b) Sei $F := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -2x_1 - x_2 + 2x_3 = -12 \right\}$ eine weitere Ebene im $\mathbb{R}^3$.
Bestimmen Sie den Punkt S der Ebene F, welcher den kleinsten Abstand zu U hat.

$S =$ ☐

Aufgabe 8 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Gegeben sei die Basis $B\colon b_1, b_2$ des Vektorraums $\mathbb{R}^2$ durch $b_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$,
sowie die Basis $P\colon p_1, p_2, p_3$ des Vektorraums $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ durch $p_1(X) := X^2$, $p_2(X) := X$, $p_3(X) := 1$.
Seien zudem

$$v := \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w := \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \mapsto cX^2 + d(2 - X) + c(X+3).$$

(a) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor ${}_Bv$ und $\alpha(w)$.

${}_Bv =$ ☐ $\qquad \alpha(w) =$ ☐

(b) Bestimmen Sie ${}_P\alpha_B$.

${}_P\alpha_B =$ ☐

Scheinklausur — **Höhere Mathematik 1** — **14. 12. 2019**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ☐1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

(a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, für die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$\frac{x^2}{x+3} \geqq x+2\,.$$

(b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$|x-3| \geqq |x+1|\,.$$

Aufgabe 3 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

(a) Geben Sie die folgenden Ausdrücke jeweils als komplexe Zahl der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$\frac{3-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \qquad\qquad \sum_{n=3}^{5}\Big((5-2\mathrm{i})^{n-3}\cdot \operatorname{Im}(\mathrm{i}^n)\Big) =$$

(b) Gegeben seien $z := \frac{1}{\sqrt{2}}(-3+3\mathrm{i})$ und $w := \frac{\mathrm{i}^{11}}{z^3}$.

Bestimmen Sie jeweils den Betrag und das Argument der Zahlen z und w. Geben Sie dabei die Argumente von z und w im Intervall $[0, 2\pi)$ an.

$|z| =$ $\qquad$ $\arg(z) =$ $\qquad$ $|w| =$ $\qquad$ $\arg(w) =$

Aufgabe 4 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Bestimmen Sie die Inverse von $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

$A^{-1} =$

Aufgabe 5 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Gegeben seien

$$v := \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad w := \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x := \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad y := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie das Skalarprodukt von v und w.

$\langle v \mid w \rangle =$

(b) Bestimmen Sie den Cosinus des Winkels φ zwischen x und y.

$\cos\varphi =$

(c) Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig. Bestimmen Sie die fehlende Koordinate so, dass die folgenden Vektoren keine Basis des $\mathbb{R}^4$ bilden.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{} \\ c \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

(a) Seien $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -8 \end{pmatrix}$ und $b := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

$\mathcal{L} =$

(b) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass $A_\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha & 3 \\ 0 & 2 & \alpha & 3 \\ 0 & -3\alpha & -6 & -9 \end{pmatrix}$ den Rang 3 besitzt.

Aufgabe 7 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Gegeben seien die Gerade g und die Punkte R, U im $\mathbb{R}^3$ durch

$$g := \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad R := \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad U := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene E, die die Gerade g und den Punkt R enthält.

$$E\colon \quad \boxed{} \cdot x_1 + \boxed{} \cdot x_2 + \boxed{} \cdot x_3 = \boxed{}$$

(b) Sei $F := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -15 \right\}$ eine weitere Ebene im $\mathbb{R}^3$.
Bestimmen Sie den Punkt S der Ebene F, welcher den kleinsten Abstand zu U hat.

$$S = \boxed{}$$

Aufgabe 8 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Gegeben sei die Basis $B\colon b_1, b_2$ des Vektorraums $\mathbb{R}^2$ durch $b_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$,
sowie die Basis $P\colon p_1, p_2, p_3$ des Vektorraums $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ durch $p_1(X) := X^2$, $p_2(X) := X$, $p_3(X) := 1$.
Seien zudem

$$v := \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad w := \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \mapsto cX^2 + d(3 - X) + c(2X + 1).$$

(a) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor ${}_Bv$ und $\alpha(w)$.

$${}_Bv = \boxed{} \qquad \alpha(w) = \boxed{}$$

(b) Bestimmen Sie ${}_P\alpha_B$.

$${}_P\alpha_B = \boxed{}$$

Scheinklausur **Höhere Mathematik 1** **14. 12. 2019**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ☐1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

(a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, für die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$\frac{x^2}{x-1} \geqq x+3\,.$$

(b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$|x-3| \geqq |x+2|\,.$$

Aufgabe 3 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

(a) Geben Sie die folgenden Ausdrücke jeweils als komplexe Zahl der Form $a+b\mathrm{i}$ mit $a,b \in \mathbb{R}$ an.

$$\frac{5-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \qquad\qquad \sum_{n=3}^{5}\left((2-4\mathrm{i})^{n-3}\cdot \operatorname{Im}(\mathrm{i}^n)\right) =$$

(b) Gegeben seien $z := 2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}$ und $w := \dfrac{\mathrm{i}^{10}}{z^3}$.

Bestimmen Sie jeweils den Betrag und das Argument der Zahlen z und w. Geben Sie dabei die Argumente von z und w im Intervall $[0, 2\pi)$ an.

$|z| =$ $\qquad$ $\arg(z) =$ $\qquad$ $|w| =$ $\qquad$ $\arg(w) =$

Aufgabe 4 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Bestimmen Sie die Inverse von $A := \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

$A^{-1} =$

Aufgabe 5 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Gegeben seien

$$v := \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad w := \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x := \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie das Skalarprodukt von v und w.

$\langle v \mid w \rangle =$

(b) Bestimmen Sie den Cosinus des Winkels φ zwischen x und y.

$\cos\varphi =$

(c) Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig. Bestimmen Sie die fehlende Koordinate so, dass die folgenden Vektoren keine Basis des $\mathbb{R}^4$ bilden.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \square \\ c \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

(a) Seien $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -7 \end{pmatrix}$ und $b := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

$\mathcal{L} =$

(b) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass $A_\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \alpha \\ 0 & 2 & 2 & \alpha \\ 0 & -2\alpha & -6 & -9 \end{pmatrix}$ den Rang 3 besitzt.

Aufgabe 7 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Gegeben seien die Gerade g und die Punkte R, U im $\mathbb{R}^3$ durch

$$g := \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad R := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene E, die die Gerade g und den Punkt R enthält.

E: $\square \cdot x_1 + \square \cdot x_2 + \square \cdot x_3 = \square$

(b) Sei $F := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x_1 - 2x_2 - x_3 = -24 \right\}$ eine weitere Ebene im $\mathbb{R}^3$.
Bestimmen Sie den Punkt S der Ebene F, welcher den kleinsten Abstand zu U hat.

$S =$ $\square$

Aufgabe 8 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Gegeben sei die Basis $B\colon b_1, b_2$ des Vektorraums $\mathbb{R}^2$ durch $b_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

sowie die Basis $P\colon p_1, p_2, p_3$ des Vektorraums $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ durch $p_1(X) := X^2$, $p_2(X) := X$, $p_3(X) := 1$.

Seien zudem

$$v := \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad w := \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \mapsto cX^2 + d(2+X) + c(3X-1).$$

(a) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor ${}_B v$ und $\alpha(w)$.

${}_B v =$ $\square$ $\qquad \alpha(w) =$ $\square$

(b) Bestimmen Sie ${}_P\alpha_B$.

${}_P\alpha_B =$ $\square$

Scheinklausur **Höhere Mathematik 1** **14. 12. 2019**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ☐1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

(a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, für die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$\frac{x^2}{x-2} \geqq x+5\,.$$

(b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$|x-2| \geqq |x+3|\,.$$

Aufgabe 3 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

(a) Geben Sie die folgenden Ausdrücke jeweils als komplexe Zahl der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$\frac{7-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \qquad\qquad \sum_{n=3}^{5}\left((5-3\mathrm{i})^{n-3}\cdot \operatorname{Im}(\mathrm{i}^n)\right) =$$

(b) Gegeben seien $z := \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-3\mathrm{i}\right)$ und $w := \frac{\mathrm{i}^{10}}{z^4}$.

Bestimmen Sie jeweils den Betrag und das Argument der Zahlen z und w. Geben Sie dabei die Argumente von z und w im Intervall $[0, 2\pi)$ an.

$|z| =$ $\qquad$ $\arg(z) =$ $\qquad$ $|w| =$ $\qquad$ $\arg(w) =$

Aufgabe 4 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Bestimmen Sie die Inverse von $A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

$A^{-1} =$

Aufgabe 5 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Gegeben seien

$$v := \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad w := \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad y := \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie das Skalarprodukt von v und w.

$\langle v \mid w \rangle =$

(b) Bestimmen Sie den Cosinus des Winkels φ zwischen x und y.

$\cos\varphi =$

(c) Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig. Bestimmen Sie die fehlende Koordinate so, dass die folgenden Vektoren keine Basis des $\mathbb{R}^4$ bilden.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ \boxed{} \\ c \\ -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

(a) Seien $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ und $b := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

$\mathcal{L} =$

(b) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass $A_\alpha := \begin{pmatrix} 2 & 4\alpha & 4 & 6 \\ 0 & 2\alpha & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -6\alpha & -9 \end{pmatrix}$ den Rang 3 besitzt.

+4/1/54+

Aufgabe 7 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Gegeben seien die Gerade g und die Punkte R, U im $\mathbb{R}^3$ durch

$$g := \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad R := \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene E, die die Gerade g und den Punkt R enthält.

E: $\boxed{} \cdot x_1 + \boxed{} \cdot x_2 + \boxed{} \cdot x_3 = \boxed{}$

(b) Sei $F := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -21 \right\}$ eine weitere Ebene im $\mathbb{R}^3$.
Bestimmen Sie den Punkt S der Ebene F, welcher den kleinsten Abstand zu U hat.

$S = \boxed{}$

Aufgabe 8 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Gegeben sei die Basis $B: b_1, b_2$ des Vektorraums $\mathbb{R}^2$ durch $b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $b_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$,
sowie die Basis $P: p_1, p_2, p_3$ des Vektorraums $\mathrm{Pol}_2 \mathbb{R}$ durch $p_1(X) := X^2$, $p_2(X) := X$, $p_3(X) := 1$.
Seien zudem

$$v := \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w := \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \alpha: \mathbb{R}^2 \to \mathrm{Pol}_2 \mathbb{R}: \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \mapsto cX^2 + d(X+3) + c(2-X).$$

(a) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor ${}_Bv$ und $\alpha(w)$.

${}_Bv = \boxed{}$ $\qquad \alpha(w) = \boxed{}$

(b) Bestimmen Sie ${}_P\alpha_B$.

${}_P\alpha_B = \boxed{}$

Scheinklausur **Höhere Mathematik 1** **14. 12. 2019**

☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ☐1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

(a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, für die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$\frac{x^2}{x+1} \geqq x+3\,.$$

(b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$|x-2| \geqq |x+4|\,.$$

Aufgabe 3 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

(a) Geben Sie die folgenden Ausdrücke jeweils als komplexe Zahl der Form $a+b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$\frac{9-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \qquad\qquad \sum_{n=3}^{5}\Big((3-4\mathrm{i})^{n-3}\cdot \operatorname{Im}(\mathrm{i}^n)\Big) =$$

(b) Gegeben seien $\quad z := \sqrt{3}-\mathrm{i} \quad$ und $\quad w := \dfrac{\mathrm{i}^{10}}{z^4}\,.$

Bestimmen Sie jeweils den Betrag und das Argument der Zahlen z und w. Geben Sie dabei die Argumente von z und w im Intervall $[0, 2\pi)$ an.

$|z| =$ $\qquad$ $\arg(z) =$ $\qquad$ $|w| =$ $\qquad$ $\arg(w) =$

Aufgabe 4 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Bestimmen Sie die Inverse von $A := \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

$A^{-1} =$

Aufgabe 5 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Gegeben seien

$$v := \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad w := \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad y := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie das Skalarprodukt von v und w.

$\langle v \mid w \rangle =$

(b) Bestimmen Sie den Cosinus des Winkels φ zwischen x und y.

$\cos\varphi =$

(c) Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig. Bestimmen Sie die fehlende Koordinate so, dass die folgenden Vektoren keine Basis des $\mathbb{R}^4$ bilden.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxed{} \\ c \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

(a) Seien $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & -6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ und $b := \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

$\mathcal{L} =$

(b) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass $A_\alpha := \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 2 & 3 \\ 0 & -\alpha & 2 & 3 \\ 0 & -6 & 3\alpha & -9 \end{pmatrix}$ den Rang 3 besitzt.