Aufgabe 7 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Gegeben sei das vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Vektorfeld

$$f_\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2y\cos(2x) + \mathrm{e}^{3y} \\ \sin(2x) + \alpha x \mathrm{e}^{\alpha y} \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix von f_α.

$$\mathrm{J}f_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4y\sin(2x) & 2\cos(2x) + 3\mathrm{e}^{3y} \\ 2\cos(2x) + \alpha \mathrm{e}^{\alpha y} & \alpha^2 x \mathrm{e}^{\alpha y} \end{pmatrix}$$

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ hat f_α ein Potential? $\alpha =$ 3

Aufgabe 8 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Für Konstanten $a,\ t_1 \in \mathbb{R}$ ist die Parametrisierung

$$C\colon [0, t_1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ a\cos(t) \end{pmatrix}$$

einer Kurve K gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Konstanten a und t_1 so, dass C eine Kurve K von $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ doppelpunktfrei parametrisiert.

$a =$ 6, $t_1 = \dfrac{\pi}{3}$

(b) Bestimmen Sie die Länge der Kurve K aus **(a)**. $L(K) =$ 3

(c) Gegeben sei das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \mathrm{e}^{x_1 x_2} - 5 \\ x_1 \mathrm{e}^{x_1 x_2} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ein Potential U von f so, dass $U(0,0) = 3$ gilt.

$$U\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{x_1 x_2} - 5x_1 + 2$$

Berechnen Sie das folgende Kurvenintegral von f längs K aus **(a)**.

$$\int_K f(x) \bullet \mathrm{d}\,x = \mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^6$$

Scheinklausur — **Höhere Mathematik 2** — **4. 2. 2020**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ■1 ☐2 ☐3 ☐4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Bestimmen Sie für jede der folgenden Funktionen Lage und Wert ihres globalen Maximums.

Funktion	Maximum bei	Wert des Maximums
$f\colon [-2,2] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3$	$x =$ 2	5
$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \mathrm{e}^{2x} + \int_5^x (3-t)\,\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}\,t$	$x =$ 5	e^{10}

Aufgabe 3 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Gegeben sei für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$f_\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{3}(4x-3\alpha)^3 - 5xy^2 .$$

(a) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hessematrix von f_α in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\nabla f_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{4(4x-3\alpha)^2 - 5y^2} & \boxed{-10xy} \end{pmatrix}^\intercal$$

$$\mathrm{H} f_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{32(4x-3\alpha)} & \boxed{-10y} \\ \boxed{-10y} & \boxed{-10x} \end{pmatrix}$$

(b) Geben Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ an, für die die Hessematrix von f_α an der Stelle $\binom{-1}{0}$ positiv definit ist.

$$\boxed{\left\{\alpha \in \mathbb{R} \,\middle|\, \alpha < -\frac{4}{3}\right\}}$$

(c) Bestimmen Sie den Wert von $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass für das Taylorpolynom 1-ter Stufe von f_α an der Stelle $\binom{1}{1}$ gilt $T_1\left(f_\alpha, \binom{x}{y}, \binom{1}{1}\right) = 4 + 31(x-1) - 10(y-1)$.

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{3}}$$

Aufgabe 4 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Berechnen Sie:

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{(3n-1)\cos(\pi n)}{n} + 7\right)$	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} 5\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\,\mathrm{d}\,x$	$\lim\limits_{x\to 2-0}\frac{\cos(x-2)}{x-2}$
4	$\frac{5}{\sqrt{2}}$	$-\infty$

Aufgabe 5 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Gegeben sei die folgende Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto 3\,y - \sqrt{7}\,z + 1.$$

(a) Geben Sie die fünf Gleichungen (in x, y, z, λ_1 und λ_2) an, welche die Bedingungen von Lagrange für relative Extrema von f unter den Nebenbedingungen $g_1(x,y,z) = 0$ und $g_2(x,y,z) = 0$ beschreiben mit

$$g_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto x^2+y^2+z^2-5 \quad \text{und} \quad g_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto x-2.$$

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 x + \lambda_2 &= 0 \\ 3 + 2\lambda_1 y &= 0 \\ -\sqrt{7} + 2\lambda_1 z &= 0 \\ x^2+y^2+z^2-5 &= 0 \\ x-2 &= 0 \end{aligned}$$

(b) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f unter den Nebenbedingungen $g_1(x,y,z) = 0$ und $g_2(x,y,z) = 0$ und geben Sie den Funktionswert sowie den Typ an.

Stelle	Funktionswert	Typ
$\left(2, -\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4}\right)$	-3	absolutes Minimum
$\left(2, \frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$	5	absolutes Maximum

Aufgabe 6 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Führen Sie eine Polynomdivision sowie eine Partialbruchzerlegung durch.

(a) Polynomdivision:

$$\frac{3x^2+4x-5}{x^2+x-6} = \boxed{3 + \frac{x+13}{x^2+x-6}}$$

(b) Partialbruchzerlegung:

$$\frac{3x^2+4x-5}{x^2+x-6} = \boxed{3 + \frac{3}{x-2} - \frac{2}{x+3}}$$

Aufgabe 7 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Gegeben sei das vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Vektorfeld

$$f_\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(4y) + \alpha y \mathrm{e}^{\alpha x} \\ \mathrm{e}^{5x} - 4x\sin(4y) \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix von f_α.

$$\mathrm{J}f_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 y \mathrm{e}^{\alpha x} & -4\sin(4y) + \alpha \mathrm{e}^{\alpha x} \\ 5\mathrm{e}^{5x} - 4\sin(4y) & -16x\cos(4y) \end{pmatrix}$$

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ hat f_α ein Potential? $\alpha =$ 5

Aufgabe 8 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Für Konstanten a, $t_1 \in \mathbb{R}$ ist die Parametrisierung

$$C\colon [0, t_1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

einer Kurve K gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Konstanten t_1 und a so, dass C eine Kurve K von $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ doppelpunktfrei parametrisiert.

$t_1 = \frac{\pi}{3}$, $a =$ 4

(b) Bestimmen Sie die Länge der Kurve K aus **(a)**. $L(K) =$ 2

(c) Gegeben sei das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \mathrm{e}^{x_1 x_2} \\ x_1 \mathrm{e}^{x_1 x_2} - 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ein Potential U von f so, dass $U(0,0) = -2$ gilt.

$$U\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{x_1 x_2} - 2x_2 - 3$$

Berechnen Sie das folgende Kurvenintegral von f längs K aus **(a)**.

$$\int_K f(x) \bullet \mathrm{d}\,x = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^4$$

Scheinklausur **Höhere Mathematik 2** **4. 2. 2020**

☐1 ■2 ☐3 ☐4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Bestimmen Sie für jede der folgenden Funktionen Lage und Wert ihres globalen Maximums.

Funktion	Maximum bei	Wert des Maximums
$f\colon [-2,2] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto -x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6$	$x = -2$	8
$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \mathrm{e}^{3x} + \int_8^x (5-t)\,\mathrm{e}^{3t}\,\mathrm{d}\,t$	$x = 8$	e^{24}

Aufgabe 3 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Gegeben sei für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$f_\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{3}(5y - 3\alpha)^3 - 7x^2 y\,.$$

(a) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hessematrix von f_α in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\nabla f_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{-14xy} & \boxed{5(5y-3\alpha)^2 - 7x^2} \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$$

$$\mathrm{H} f_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{-14y} & \boxed{-14x} \\ \boxed{-14x} & \boxed{50(5y-3\alpha)} \end{pmatrix}$$

(b) Geben Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ an, für die die Hessematrix von f_α an der Stelle $\binom{0}{1}$ negativ definit ist.

$$\left\{ \alpha \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{5}{3} < \alpha \right\}$$

(c) Bestimmen Sie den Wert von $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass für das Taylorpolynom 1-ter Stufe von f_α an der Stelle $\binom{1}{1}$ gilt $T_1\left(f_\alpha, \binom{x}{y}, \binom{1}{1}\right) = 2 - 14(x-1) + 38(y-1)$.

$$\alpha = \frac{2}{3}$$

Aufgabe 4 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Berechnen Sie:

$\lim\limits_{x \to 3-0} \dfrac{\cos(x-3)}{x-3}$	$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{(3n-1)\cos(\pi n)}{n} + 9 \right)$	$\int_0^{\frac{\pi}{3}} 7 \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k)!}\,\mathrm{d}\,x$
$-\infty$	6	$\frac{7}{2}\sqrt{3}$

Aufgabe 5 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Gegeben sei die folgende Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto \sqrt{7}\,x + 3\,z - 2.$$

(a) Geben Sie die fünf Gleichungen (in x, y, z, λ_1 und λ_2) an, welche die Bedingungen von Lagrange für relative Extrema von f unter den Nebenbedingungen $g_1(x,y,z) = 0$ und $g_2(x,y,z) = 0$ beschreiben mit

$$g_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 5 \quad \text{und} \quad g_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto y + 2.$$

$$\begin{aligned} \sqrt{7} + 2\lambda_1 x &= 0 \\ 2\lambda_1 y + \lambda_2 &= 0 \\ 3 + 2\lambda_1 z &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 5 &= 0 \\ y + 2 &= 0 \end{aligned}$$

(b) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f unter den Nebenbedingungen $g_1(x,y,z) = 0$ und $g_2(x,y,z) = 0$ und geben Sie den Funktionswert sowie den Typ an.

Stelle	Funktionswert	Typ
$\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}, -2, -\frac{3}{4}\right)$	-6	absolutes Minimum
$\left(\frac{\sqrt{7}}{4}, -2, \frac{3}{4}\right)$	2	absolutes Maximum

Aufgabe 6 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Führen Sie eine Polynomdivision sowie eine Partialbruchzerlegung durch.

(a) Polynomdivision:

$$\frac{2x^2 - 5x - 1}{x^2 - 5x + 6} = 2 + \frac{5x - 13}{x^2 - 5x + 6}$$

(b) Partialbruchzerlegung:

$$\frac{2x^2 - 5x - 1}{x^2 - 5x + 6} = 2 + \frac{3}{x-2} + \frac{2}{x-3}$$

Aufgabe 7 (3 Punkte)

☐0 ☐1 ☐2 ■3

Gegeben sei das vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Vektorfeld

$$f_\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3y\cos(3x) + \mathrm{e}^{2y} \\ \sin(3x) + \alpha x \mathrm{e}^{\alpha y} \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix von f_α.

$$\mathrm{J}f_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9y\sin(3x) & 3\cos(3x) + 2\mathrm{e}^{2y} \\ 3\cos(3x) + \alpha\mathrm{e}^{\alpha y} & \alpha^2 x \mathrm{e}^{\alpha y} \end{pmatrix}$$

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ hat f_α ein Potential? $\alpha = 2$

Aufgabe 8 (5 Punkte)

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Für Konstanten $a,\, t_1 \in \mathbb{R}$ ist die Parametrisierung

$$C\colon [0, t_1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ a\cos(t) \end{pmatrix}$$

einer Kurve K gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Konstanten a und t_1 so, dass C eine Kurve K von $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ doppelpunktfrei parametrisiert.

$a = 8$, $t_1 = \dfrac{\pi}{3}$

(b) Bestimmen Sie die Länge der Kurve K aus **(a)**. $L(K) = 4$

(c) Gegeben sei das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_2\mathrm{e}^{-x_1x_2} + 3 \\ -x_1\mathrm{e}^{-x_1x_2} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ein Potential U von f so, dass $U(0,0) = -1$ gilt.

$$U\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-x_1x_2} + 3x_1 - 2$$

Berechnen Sie das folgende Kurvenintegral von f längs K aus **(a)**.

$$\int_K f(x) \bullet \mathrm{d}\,x = \mathrm{e}^{-4} - \mathrm{e}^{-8}$$

Scheinklausur **Höhere Mathematik 2** **4. 2. 2020**

☐1 ☐2 ■3 ☐4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt)

☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Bestimmen Sie für jede der folgenden Funktionen Lage und Wert ihres globalen Maximums.

Funktion	Maximum bei	Wert des Maximums
$f\colon [-2,2] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5$	$x =$ 2	7
$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \mathrm{e}^{4x} + \int_9^x (5-t)\,\mathrm{e}^{4t}\,\mathrm{d}\,t$	$x =$ 9	e^{36}

Aufgabe 3 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Gegeben sei für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$f_\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{3}(5x+3\alpha)^3 - 2xy^2 .$$

(a) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hessematrix von f_α in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\nabla f_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5(5x+3\alpha)^2 - 2y^2 & -4xy \end{pmatrix}^\intercal$$

$$\mathrm{H} f_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50(5x+3\alpha) & -4y \\ -4y & -4x \end{pmatrix}$$

(b) Geben Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ an, für die die Hessematrix von f_α an der Stelle $\binom{1}{0}$ negativ definit ist.

$$\left\{\alpha \in \mathbb{R} \;\middle|\; \alpha < -\frac{5}{3}\right\}$$

(c) Bestimmen Sie den Wert von $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass für das Taylorpolynom 1-ter Stufe von f_α an der Stelle $\binom{1}{1}$ gilt $T_1\left(f_\alpha, \binom{x}{y}, \binom{1}{1}\right) = 7 + 43(x-1) - 4(y-1)$.

$$\alpha = -\frac{2}{3}$$

Aufgabe 4 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Berechnen Sie:

$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \left(\frac{(3n-1)\cos(\pi n)}{n} - 5\right)$	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} 9 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\,\mathrm{d}\,x$	$\lim_{x\to 4-0} \frac{\cos(x-4)}{x-4}$
-2	$\frac{9}{\sqrt{2}}$	$-\infty$

Aufgabe 5 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Gegeben sei die folgende Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto 3\,x - \sqrt{7}\,y + 2.$$

(a) Geben Sie die fünf Gleichungen (in x, y, z, λ_1 und λ_2) an, welche die Bedingungen von Lagrange für relative Extrema von f unter den Nebenbedingungen $g_1(x,y,z) = 0$ und $g_2(x,y,z) = 0$ beschreiben mit

$$g_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 5 \quad \text{und} \quad g_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto z - 2.$$

$$\begin{aligned} 3 + 2\lambda_1 x &= 0 \\ -\sqrt{7} + 2\lambda_1 y &= 0 \\ 2\lambda_1 z + \lambda_2 &= 0 \\ x^2+y^2+z^2-5 &= 0 \\ z-2 &= 0 \end{aligned}$$

(b) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f unter den Nebenbedingungen $g_1(x,y,z) = 0$ und $g_2(x,y,z) = 0$ und geben Sie den Funktionswert sowie den Typ an.

Stelle	Funktionswert	Typ
$\left(-\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4}, 2\right)$	-2	absolutes Minimum
$\left(\frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{7}}{4}, 2\right)$	6	absolutes Maximum

Aufgabe 6 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Führen Sie eine Polynomdivision sowie eine Partialbruchzerlegung durch.

(a) Polynomdivision:

$$\frac{-2x^2-9x-7}{x^2+5x+6} = -2 + \frac{x+5}{x^2+5x+6}$$

(b) Partialbruchzerlegung:

$$\frac{-2x^2-9x-7}{x^2+5x+6} = -2 + \frac{3}{x+2} - \frac{2}{x+3}$$

Aufgabe 7 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Gegeben sei das vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Vektorfeld

$$f_\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(5y) + \alpha y \mathrm{e}^{\alpha x} \\ \mathrm{e}^{4x} - 5x\sin(5y) \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix von f_α.

$$\mathrm{J}f_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 y \mathrm{e}^{\alpha x} & -5\sin(5y) + \alpha \mathrm{e}^{\alpha x} \\ 4\mathrm{e}^{4x} - 5\sin(5y) & -25x\cos(5y) \end{pmatrix}$$

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ hat f_α ein Potential? $\alpha =$ 4

Aufgabe 8 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Für Konstanten $a,\ t_1 \in \mathbb{R}$ ist die Parametrisierung

$$C\colon [0, t_1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

einer Kurve K gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Konstanten t_1 und a so, dass C eine Kurve K von $\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ doppelpunktfrei parametrisiert.

$t_1 = \frac{\pi}{3}$, $a =$ 10

(b) Bestimmen Sie die Länge der Kurve K aus **(a)**. $L(K) =$ 5

(c) Gegeben sei das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_2 \mathrm{e}^{-x_1 x_2} \\ -x_1 \mathrm{e}^{-x_1 x_2} + 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ein Potential U von f so, dass $U(0,0) = 4$ gilt.

$$U\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-x_1 x_2} + 4x_2 + 3$$

Berechnen Sie das folgende Kurvenintegral von f längs K aus **(a)**.

$$\int_K f(x) \bullet \mathrm{d}\,x = \mathrm{e}^{-5} - \mathrm{e}^{-10}$$

Scheinklausur **Höhere Mathematik 2** **4. 2. 2020**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ☐1 ☐2 ☐3 ■4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Aufgabe 2 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Bestimmen Sie für jede der folgenden Funktionen Lage und Wert ihres globalen Maximums.

Funktion	Maximum bei	Wert des Maximums
$f\colon [-2,2] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto -x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 8$	$x = \;\; -2$	6
$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \mathrm{e}^{5x} + \int_7^x (2-t)\,\mathrm{e}^{5t}\,\mathrm{d}\,t$	$x = \;\; 7$	e^{35}

Aufgabe 3 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Gegeben sei für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$f_\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{3}(4y+3\alpha)^3 - 3x^2y\,.$$

(a) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hessematrix von f_α in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\nabla f_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6xy & 4(4y+3\alpha)^2 - 3x^2 \end{pmatrix}^\intercal$$

$$\mathrm{H} f_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6y & -6x \\ -6x & 32(4y+3\alpha) \end{pmatrix}$$

(b) Geben Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ an, für die die Hessematrix von f_α an der Stelle $\binom{0}{-1}$ positiv definit ist.

$$\left\{ \alpha \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{4}{3} < \alpha \right\}$$

(c) Bestimmen Sie den Wert von $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass für das Taylorpolynom 1-ter Stufe von f_α an der Stelle $\binom{1}{1}$ gilt $T_1\left(f_\alpha, \binom{x}{y}, \binom{1}{1}\right) = 6 - 6(x-1) + 33(y-1)$.

$$\alpha = -\frac{1}{3}$$

Aufgabe 4 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Berechnen Sie:

$\int_0^{\frac{\pi}{3}} 3\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\,\mathrm{d}\,x$	$\lim_{x\to 5-0} \frac{\cos(x-5)}{x-5}$	$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \left(\frac{(3n-1)\cos(\pi n)}{n} - 6\right)$
$\frac{3}{2}\sqrt{3}$	$-\infty$	-3

Aufgabe 5 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Gegeben sei die folgende Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto 3\,x + \sqrt{7}\,z - 1.$$

(a) Geben Sie die fünf Gleichungen (in x, y, z, λ_1 und λ_2) an, welche die Bedingungen von Lagrange für relative Extrema von f unter den Nebenbedingungen $g_1(x,y,z) = 0$ und $g_2(x,y,z) = 0$ beschreiben mit

$$g_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto x^2+y^2+z^2-5 \quad \text{und} \quad g_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto y-2.$$

$$\begin{aligned} 3 + 2\lambda_1 x &= 0 \\ 2\lambda_1 y + \lambda_2 &= 0 \\ \sqrt{7} + 2\lambda_1 z &= 0 \\ x^2+y^2+z^2-5 &= 0 \\ y-2 &= 0 \end{aligned}$$

(b) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f unter den Nebenbedingungen $g_1(x,y,z) = 0$ und $g_2(x,y,z) = 0$ und geben Sie den Funktionswert sowie den Typ an.

Stelle	Funktionswert	Typ
$\left(-\frac{3}{4}, 2, -\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$	-5	absolutes Minimum
$\left(\frac{3}{4}, 2, \frac{\sqrt{7}}{4}\right)$	3	absolutes Maximum

Aufgabe 6 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Führen Sie eine Polynomdivision sowie eine Partialbruchzerlegung durch.

(a) Polynomdivision:

$$\frac{-3x^2+5x+7}{x^2-x-6} = -3 + \frac{2x-11}{x^2-x-6}$$

(b) Partialbruchzerlegung:

$$\frac{-3x^2+5x+7}{x^2-x-6} = -3 + \frac{3}{x+2} - \frac{1}{x-3}$$