Aufgabe 7 (10 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ■10

Wir betrachten die Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^\intercal A x + 2a^\intercal x + c = 0 \right\}$$

mit $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $c = -2$.

(a) Bestimmen Sie $\operatorname{Rg} A = \boxed{2}$.

(b) Bestimmen Sie $A_{\text{erw}} = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}}$ und $\operatorname{Rg} A_{\text{erw}} = \boxed{2}$.

(c) Welchen Typ hat die Quadrik Q?

☒ kegelige Quadrik ☐ Mittelpunktsquadrik ☐ parabolische Quadrik

(d) Was sind die Eigenwerte von A? $\boxed{7, -1}$

(e) Geben Sie eine Matrix D und eine orthogonale Matrix F so an, dass $D = F^\intercal A F$ Diagonalgestalt annimmt.

$$D = \boxed{\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \qquad F = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

(f) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform sowie die Gestalt der Quadrik Q.

Normalform: $\boxed{7y_1^2 - y_2^2 = 0}$

Gestalt: schneidendes Geradenpaar

■1 ☐2 ☐3 ☐4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ■2

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Sei $A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -3 & \alpha & 12 \\ 2 & -4 & -8 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie den Rang von A_3. $\operatorname{Rg} A_3 =$ $\boxed{2}$

(b) Für welche Werte des Parameters α ist $\operatorname{Rg} A_\alpha = 1$? $\alpha =$ $\boxed{6}$

Aufgabe 3 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

(a) Berechnen Sie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \boxed{\frac{3}{4}}$ und $\sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \boxed{\frac{1}{12}}$.

(b) Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $b_0 = 1$ und $b_n = \frac{(b_{n-1})^2}{4} + 1$, konvergiert. Bestimmen Sie den Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \boxed{2}$$

(c) Bestimmen Sie die Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 2 + \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\left(\frac{1+3n}{n}\right)$.

$$\boxed{-1, 2, 5}$$

Aufgabe 4 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ■2

Für $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ beschreibt die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto Ax$ eine Drehung mit Drehachse G und Drehwinkel φ. Bestimmen Sie G und $\cos(\varphi)$:

$$G = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)} \qquad \cos(\varphi) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Aufgabe 5 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Für $x \in \mathbb{R}$ sei $A_x = \begin{pmatrix} 3 & x & -1 \\ x & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben.

(a) Berechnen Sie $\det A_x$ in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}$.

$$\det A_x = \boxed{8 - x^2}.$$

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Matrix A_x invertierbar?

$$\boxed{\left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \neq \pm 2\sqrt{2}\right\}}$$

(c) Berechnen Sie $(A_3)^{-1}$.

$$(A_3)^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 3 & -4 & 3 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 6 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Sei $M : m_1, m_2, m_3$ die Basis von $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ mit

$$m_1(X) = 1, \quad m_2(X) = X, \quad m_3(X) = X^2,$$

und $Q : q_1, q_2, q_3$ die Basis von $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ mit

$$q_1(X) = X^2 + X + 3, \quad q_2(X) = 5X^2 + 2X + 1, \quad q_3(X) = -X^2 - 5X + 2$$

Sei $\varphi\colon \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R} \to \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R} : p(X) \mapsto p(X-2)$. Bestimmen Sie die Matrizen ${}_M\mathrm{id}_Q$ und ${}_M\varphi_Q$.

$${}_M\mathrm{id}_Q = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}} \qquad {}_M\varphi_Q = \boxed{\begin{pmatrix} 5 & 17 & 8 \\ -3 & -18 & -1 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}}$$